

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANTES

par

Bernard REMAUD

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA COLLISION ELASTIQUE NEUTRON-LITHIUM 6

Soutenue le 26 Mars 1971, devant la Commission d'examen

M. F. PERRIN

Président

M. J. RAYNAL

M. R. NATAF

M. P. AVIGNON

M. W. LASKAR

}
Examineurs

THESE

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE NANTES

par

Bernard REMAUD

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA COLLISION ELASTIQUE NEUTRON-LITHIUM 6

Soutenue le 26 Mars 1971, devant la Commission d'examen

M. F. PERRIN

Président

M. J. RAYNAL

M. R. NATAF

M. P. AVIGNON

M. W. LASKAR

}
Examineurs

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici tous mes remerciements à Monsieur Francis Perrin , Professeur au Collège de France , d'avoir bien voulu s'intéresser à ce travail et d'avoir accepté la présidence du jury de thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur Nataf pour sa lecture de la première version de cette thèse; qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour sa participation au jury .

Je remercie Monsieur Raynal et les chercheurs du C.E.A. appartenant au service de Monsieur Bloch pour leur accueil lors de mes passages à Saclay et pour les suggestions et remarques qu'ils m'ont faites à cette occasion .

Je tiens aussi à remercier Monsieur Avignon, Directeur de l'Institut de Physique de Nantes , pour l'attention qu'il a portée à ce travail.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur le Professeur Laskar . Je lui dois toute ma formation en Physique Théorique, particulièrement en Physique Nucléaire des noyaux légers . Cette thèse a été réalisée sous sa direction, qu'il soit remercié pour tous les conseils qu'il m'a donnés durant son élaboration.

S O M M A I R E

- - - - -

Chapitre I

INTRODUCTION

- A - Le Modèle de J.A. Wheeler
- B - Le modèle en amas
- C - Historique des travaux sur les noyaux légers
- D - Le Li^6 et la collision élastique $n\text{-Li}^6$

Chapitre II

LES FONCTIONS D'ONDES DE LA COUCHE $(1s)^A (1p)^{A'}$

- A - Introduction
- B - Le modèle en couches
- C - Construction des fonctions d'onde d'espace du modèle en groupes de résonance

Chapitre III

LE POTENTIEL A DEUX CORPS - LES FONCTIONS D'ONDES TOTALES

- A - Le Potentiel à 2 corps
- B - L'antisymétrisation des fonctions d'ondes totales
- C - Le principe variationnel
- D - Expression des opérateurs

Chapitre IV

LES ENERGIES DE LIAISON

- A - Introduction
- B - Calcul des coefficients des intégrales de Potentiel
- C - Regroupement des intégrales d'espace
- D - Tests pour la vérification du calcul des coefficients
- E - Méthodes de calcul des intégrales d'espace
- F - Résultats pour le Li^6

Chapitre V

L'EQUATION DE LA COLLISION $n\text{-Li}^6$

- A - Introduction
- B - La fonction d'onde du système $n\text{-Li}^6$
- C - Le principe variationnel - L'équation de la collision
- D - Le développement sphérique de l'équation
- E - Les noyaux d'échange
- F - Les noyaux cinétiques
- G - Listing des termes de l'équation

Chapitre VI

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA COLLISION - LES RESULTATS

- A - Introduction
- B - Méthode numérique de résolution
- C - Calcul des sections efficaces
- D - Les résultats.

RESUME

Dans cette thèse, nous étudierons explicitement l'énergie de liaison du Li^6 et la collision élastique $n\text{-Li}^6$, dans le cadre du modèle en groupes de résonance de J.A. Wheeler.

Notre but est - à partir de $n\text{-Li}^6$ - de mettre au point les méthodes qui permettront l'extension de l'étude théorique des collisions nucléaires pour les noyaux $A \leq 16$, Ce travail ayant été fait complètement pour les noyaux $A \leq 4$.

Dans une première partie, est exposée la méthode d'obtention des fonctions d'espace des noyaux $(1s)^A (1p)^{A'}$ à partir du modèle en couches.

Les fonctions d'ondes totales sont obtenues (avec le couplage L-S) en antisymétrisant pour toutes les paires de nucléons. Ces fonctions d'onde totales sont soumises au principe variationnel.

Le calcul des énergies de liaison se fait à partir d'un potentiel nucléon-nucléon gaussien, central avec forces d'échange et pour les différentes profondeurs et portées utilisées dans des calculs précédents.

Puis sont exposées les méthodes de calcul des coefficients intervenant dans les intégrales d'échange et les méthodes de calcul des différentes intégrales d'espace intervenant dans l'énergie de liaison : intégrales qui sont explicitées pour les noyaux $A \leq 8$.

Le principe variationnel permet de fixer la valeur des paramètres et de donner une énergie de liaison que l'on peut comparer avec succès à la valeur expérimentale.

La seconde partie traite de la diffusion élastique $n\text{-Li}^6$ obtenue en tenant compte des résultats de la première partie. Une fois établie la fonction d'onde totale du système $n\text{-Li}^6$, l'application du principe variationnel conduit à une équation intégral-différentielle, dont la solution est la fonction de diffusion.

Une des caractéristiques des problèmes de collision avec des noyaux $A \gg 4$ est la multiplication des types d'échange possibles entre les nucléons. Ceci conduit à de très nombreux noyaux intégraux : ceux-ci sont donnés ainsi que les méthodes qui permettent de les regrouper et de les calculer numériquement.

L'équation intégral-différentielle est résolue par une méthode aux différences finies, désormais classique.

Les valeurs des phases pour $0 \leq l \leq 3$, sont données pour les deux canaux de spin $1/2$ et $3/2$ et pour des énergies allant de 0 à 15 Mev.

Les sections efficaces calculées sont comparées avec les résultats expérimentaux de diverses équipes. Malgré les approximations faites dans cette étude préliminaire (potentiel central, réaction à un canal) le modèle de Wheeler permet de retrouver la forme et l'ordre de grandeur des sections efficaces aux basses énergies, et de confirmer la structure prédominante $n\text{-Li}^6$ du niveau excité ${}_{24}^{5/2}\text{P}$ du Li^7 .

CHAPITRE I

INTRODUCTION

- A - Le modèle de J.A. Wheeler
- B - Le modèle en amas
- C - Historique des travaux sur les noyaux légers
- D - Le Li^6 et la collision élastique $n\text{-Li}^6$

A - LE MODELE DE J.A. WHEELER

Les problèmes de physique nucléaire des noyaux légers forment une classe à part. En effet, on ne peut distinguer les nucléons internes et les nucléons de surface ; chaque nucléon est en surface et doit être traité individuellement.

Un modèle a été proposé par J.A. Wheeler (71) qui s'applique bien aux problèmes des noyaux légers. L'idée de base est que n'importe quel état du noyau peut être considéré comme une superposition de tous les groupements "possibles" des nucléons qui le composent ; "possibles" signifie compatibles avec les principes fondamentaux de la Mécanique Quantique - en particulier le principe d'exclusion de Pauli - et les symétries particulières du problème. Ces groupements - "clusters" en anglais - sont continuellement brisés et reformés ; les forces résultant des échanges entre nucléons.

Il est à noter que tous ces groupements possibles n'ont pas la même importance ; par exemple, les plus liés sont les plus favorisés. Aussi, dans les calculs pratiques - le fait de tenir compte de tous les états donnerait une complication très grande aux calculs -, on essaie de n'utiliser que les plus importants.

Dans le cas des collisions, l'application d'un tel modèle amène la résolution d'équations intégral-différentielles, couplées ou non, du type :

$$(I,1) \left\{ \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{r}}^2 + E_{inc} \right\} F(\vec{r}) = U(\vec{r}) F(\vec{r}) + \int K(\vec{r}, \vec{r}') F(\vec{r}') d\vec{r}'$$

B - LE MODELE EN AMAS (ou CLUSTER MODEL)

Plus tard, en 1958, d'un point de départ différent, Wildermuth et Kanellopoulos (68) lancèrent un modèle qu'ils baptisèrent "cluster model", et qui est référencé dans les bibliographies françaises par "modèle en amas". Ce modèle possède de nombreux traits communs au "modèle des groupes résonnants" de J.A. Wheeler.

Comme nous le verrons en détail plus loin, partant de l'équation de Schrödinger pour A nucléons dans le cadre du modèle en couches à nucléon célibataire, on procède à des regroupements de nucléons. Grâce à l'application du principe variationnel, ce modèle est plus souple que le modèle en couches, car il effectue implicitement des mélanges de configurations et inclut aussi des caractéristiques des modèles collectifs (69).

Nous insisterons aussi sur le fait que ces deux modèles en réalité très liés, ont deux caractéristiques principales :

1°) Ils permettent le traitement unifié des problèmes de structure des états liés et des problèmes de collision.

2°) L'étude des états liés et non liés du noyau se fait à partir de l'interaction nucléon-nucléon. Cette interaction, bien que de mieux en mieux connue, comporte encore des aspects phénoménologiques ; cependant les potentiels nucléaires à 2 nucléons ainsi déduits permettent d'inclure la plupart des phénomènes intervenant dans les systèmes à N nucléons, même si l'on néglige les interactions à 3 corps et plus.

C - HISTORIQUE DES TRAVAUX SUR LES NOYAUX LEGERS

I

L'article de J.A. Wheeler en 1937 paraissait être loin de toute application numérique. Ce fut le mérite de Buckingham et Massey (14) de montrer qu'il était possible d'obtenir des résultats numériques à partir de l'article théorique cité plus haut. Ils calculèrent la diffusion élastique neutron- deutéron avec potentiel central de forme exponentielle.

A partir de ce calcul, grâce à l'apparition de calculatrices électroniques de plus en plus puissantes, les calculs furent poursuivis dans deux directions :

1°) L'introduction d'un potentiel à deux corps de plus en plus sophistiqué. Ainsi pour le problème n-D, Buckingham, Hubbard et Massey en 1951 (15) calculèrent d'autres phases avec le même potentiel ; Christian et Gammel (21) introduirent le potentiel de Yukawa. L'étude des différentes portées de potentiel fut faite par Burke et Robertson (16) en 1957 ; la polarisation fut introduite par Burke et Haas (19).

Les forces tensorielles furent introduites — Bransden (7), Horie, Tamura et Yoshida (31), Bransden, Smith et Tate (10) — au prix de complications dans les calculs.

2°) L'autre direction naturelle a été d'effectuer les calculs sur des problèmes incluant de plus en plus de nucléons, et sur des collisions à plusieurs canaux.

Le problème à 4 nucléons a été étudié par Swan (59) avec la collision élastique n-T et aussi avec la collision élastique p-He₃ (59) en utilisant des méthodes variationnelles de Hulthén et Kohn. Le même problème a été repris par Bransden, Robertson et Swan en 1956 (9) pour p-T et p-He³, et par Bransden et Robertson (11).

Ils utilisèrent la méthode - désormais classique - de résolution des équations integro-différentielles décrite par H.H. ROBERTSON (52).

Le problème à 5 nucléons fut étudié par Bransden et Mac Kee (8), par Hochberg, Massey et Underhill (28) avec un potentiel central pour la collision élastique $n\text{-He}^4$. Le couplage spin-orbite a été introduit dans le même problème par Hochberg, Massey et Underhill (29). Les problèmes à 6 et 8 nucléons ont été étudiés par Bransden et Hamilton (12) dans la diffusion élastique $\text{He}^3 - \text{He}^3$ et par Butcher et Mac Namee en 1959 (20) dans $\text{He}^4 - \text{He}^4$.

Jusqu'ici les calculs effectués ne traitaient que des diffusions élastiques. Devant les résultats encourageants obtenus, il était intéressant d'appliquer les méthodes aux diffusions non élastiques, ce qui amenait des réactions à plusieurs canaux et la résolution d'équations integro-différentielles couplées.

La réaction à 3 canaux D-D est étudiée par Burke et Laskar (17), Puis la réaction à deux canaux D-T par Laskar, Tate, Pardoe et Burke (37)

Le traitement général de toutes les collisions des noyaux légers avec $A \leq 4$ a été publié par W.Laskar en 1962 (38). La série des calculs a été close par Laskar et LeMaitre (40) pour la diffusion $D\text{-He}^4$.

II

Le modèle en couches en prévoyant de manière sûre les fonctions d'ondes des systèmes liés de nucléons permettait l'attaque du problème de la structure des états fondamentaux et excités pour les noyaux $A \leq 16$.

En 1958, Be^8 fut pris comme test pour le modèle par Wildermuth et Kanellopoulos (68). En 1960, 1961, Pearlstein, Tang et Wildermuth étudièrent les niveaux de He^5 (49), Be^8 (49) et Li^6 et Li^7 (50), avec un bon accord avec les résultats expérimentaux.

Il n'est pas possible de dresser un tableau exhaustif des travaux qui ont été effectués ensuite. Cependant on peut dégager les orientations suivantes :

- L'étude des collisions élastiques des noyaux légers fut poursuivie. Ainsi Tang, Schmid, Wildermuth calculèrent la collision $\text{He}^3 - \text{He}^4$ (62) ; Thompson et Tang (64) étudièrent le problème $\text{He}^3 - \text{He}^3$, puis l'ensemble des systèmes semblables $\text{H}^3 - \text{H}^3$, $\text{H}^3 - \text{He}^3$, $\text{He}^3 - \text{He}^3$ (65). En 1969, les mêmes publièrent les résultats pour la collision $\alpha - d$ et $\alpha - d^*$ (65).

- La résolution des équations de collision permet tout naturellement le calcul de potentiels effectifs. Ce fut fait par Brown et Tang pour $\text{He}^3 + \text{He}^4$ et $\text{H}^3 + \text{He}^4$ (13) ; par Thompson, Reichstein, Mac Lure et Tang pour les potentiels effectifs $\alpha - \alpha$ et $\alpha - n$ (66).

- L'apparition des ordinateurs très puissants a permis l'application de la méthode de Monte-Carlo aux calculs des nombreuses intégrales multidimensionnelles apparaissant dans les problèmes nucléaires. Cette méthode permet les calculs avec des potentiels à coeur infiniment répulsif et avec des fonctions d'essais plus complexes. Elle a été exposée en détail dans la série "Methods in Computational Physics" par Herndon et Tang (27).

- L'étude des structures en amas a été aussi effectuée à partir des collisions élastiques et non élastiques e^- - noyau. Ainsi Suzuki (58) discute la valeur des paramètres de la fonction d'onde du Li^6 obtenus à partir de la collision $e^- - \text{Li}^6$. (18, 42, 57, ...)

D - LE Li^6 ET LA COLLISION $n\text{-Li}^6$

Il reste beaucoup à faire dans les deux directions que nous signalions plus haut ; à savoir :

- l'inclusion des données récentes sur l'interaction nucléon-nucléon dans le potentiel nucléaire.

- l'extension des calculs à l'étude des noyaux de plus en plus lourds ; Cette extension permettant de tester la validité du modèle quand A augmente.

C'est dans cette dernière direction que nous nous plaçons, et pour citer Wildermuth et Maclure (69) " Li^6 est très intéressant d'un point de vue à la fois expérimental et théorique. C'est un noyau stable qui contient suffisamment de nucléons pour mettre en évidence les traits généraux des phénomènes nucléaires et suffisamment peu pour permettre le calcul explicite".

En effet, le Li^6 est le premier noyau stable de la couche $(1s)^4 (1p)^{A-4}$, très tôt on lui a assigné une structure prédominante α -d. Tang, Wildermuth, Pearlstein ont étudié avec succès ses niveaux peu excités (61) ; de nombreux calculs ont été faits sur les collisions élastiques et inélastiques $e^- - \text{Li}^6$ (58).

Mais nous ferons deux remarques à propos de la collision $n\text{-Li}^6$

1°) Ce problème fait intervenir 7 nucléons, mais est plus compliqué que le problème à 7 corps $\text{He}^3 - \text{He}^4$ par exemple. En effet, la diffusion $n\text{-Li}^6$ inclut 3 amas de nucléons $\alpha + d + n$; lors de la collision, l'interaction du neutron avec les nucléons du deutéron par exemple dépend du degré d'échange entre le deutéron et la particule α ; ce qui permet de prévoir une multiplication considérable des types d'échanges possibles.

2°) L'étude exacte de la collision des nucléons avec les noyaux de la couche $(1s)^4$ $(1p)^{A-4}$ avec $A \leq 16$ fait intervenir un grand nombre de canaux ; ceci est dû à la faible liaison entre l' α central et le(ou les) amas périphérique(s).

Dans cette étude - que nous voulons préliminaire - nous nous limitons en raison de la complexité du problème à la réaction à 1 canal $n\text{-Li}^6$ élastique.

Il est évident que ce choix nous limite d'emblée aux énergies basses, de sorte que les interactions entre différents canaux soient les plus faibles possibles.

Cette limitation aux faibles énergies nous permet d'être plus libre dans le choix du potentiel nucléon-nucléon. A ces énergies la formule de Blatt et Jackson nous indique que la forme du potentiel à peu d'importance par rapport à sa profondeur et sa portée.

De toute façon, comme le souligne Wildermuth et Mac Lure, de l'étude des problèmes à nombreux nucléons nous ne pouvons tirer que peu de renseignements sur l'interaction nucléon-nucléon.

Mais nous pensons tirer de cette étude des renseignements sur le comportement du modèle quand le nombre de nucléons augmente. En particulier, l'énergie de liaison et le rayon carré moyen du noyau sont peu sensibles au type de liaison inter-amas, nous pourrions voir ce qu'il en est de la collision.

Enfin nous pensons que la maîtrise du problème $n\text{-Li}^6$ ouvre la voie à une extension possible du modèle, c'est-à-dire aux calculs explicites des problèmes nucléaires incluant les noyaux jusqu'à O^{16}

Dans les chapitres suivants, nous appliquerons les principes généraux du modèle en couches au calcul de la forme des fonctions d'onde des noyaux $A \leq 8$.

Puis nous exposerons le potentiel à deux corps et les résultats obtenus sur l'état fondamental du Li^6 .

Enfin, nous passerons à l'étude de la collision, sa formulation, les méthodes de calcul, et les résultats obtenus.

Tous les calculs numériques ont été effectués à partir de la nouvelle détermination des constantes physiques de Taylor, Parker, Langensberg. (63)

CHAPITRE II

LES FONCTIONS D'ONDE D'ESPACE DE LA COUCHE

$$(1s)^A (1p)^{A'} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} A \leq 4 \\ A' \leq 4 \end{array}$$

- A) Introduction
- B) Le modèle en couches
- C) Construction des fonctions d'onde d'espace
du modèle en groupes de résonance .

A - INTRODUCTION

Tous les calculs de collision entre noyaux $A \leq 4$ (38) énumérés dans le rappel historique ont été faits avec des fonctions d'onde nucléaires complètement symétriques du type

$$(II,1) \Phi(1,2,\dots,A) = e^{-\sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A \frac{\lambda}{2} \vec{r}_{ij}} \quad \psi_s(1,2,\dots,A) \quad A \leq 4$$

Lorsqu'on voulut passer à l'étude des noyaux $A \gg 4$ l'idée consistante avec le modèle de J.A. Wheeler était de supposer que le noyau était formé d'un α central et d'un ou plusieurs amas périphériques. Ainsi Be^8 était composé de 2 α , C^{12} de 3 α .

Pour résoudre le problème des états liés de ces noyaux, il faut connaître la fonction décrivant les positions relatives des α .

Ainsi en 1951, Edwards (33) calcula l'énergie de Be^8 en prenant pour liaison entre les 2 α la fonction

$$(II,2) F(\vec{r}_g) = \vec{r}_g^2 e^{-C \vec{r}_g^2}, \quad |\vec{r}_g| = \text{distance entre les centres de gravité.}$$

Biel en 1958 (5), comme application à un article sur une méthode théorique pour le classement des interactions entre nucléons, calcula l'énergie de liaison du Be^8 et du C^{12} et trouva de bons résultats avec

$$(II,3) \quad F(\vec{r}_g) = e^{-C \vec{r}_g^2}$$

Plus tard en 1960, Kopaleïshvili et les autres prirent la même fonction que Biel pour exprimer la liaison entre l' α et le deutéron dans le Li^6 (33). Ils étudièrent avec succès le niveau fondamental et celui excité avec $S = 0$, $T = 1$.

Ce choix des liaisons inter-amas décrites plus haut est guidé par des considérations de parité et est justifié par la valeur des résultats obtenus. Avec cette méthode, il n'est pas possible de faire une étude rigoureuse des états excités.

Cependant nous ferons une étude avec le type de liaison utilisé par Biel et Kopaleïshvili. En effet, les calculs sont plus simples qu'avec les liaisons du type

$$(\Pi, 4) \quad F(\vec{r}_g) = P_n(\vec{r}_g) e^{-c\vec{r}_g^2}$$

où $P_n(\vec{r}_g)$ est un polynôme de degré n .

Cela nous permettra de tester la sensibilité des résultats au type de liaison.

Mais le modèle en couches va nous permettre de déduire de façon toute naturelle les fonctions d'onde des noyaux.

B - LE MODELE EN COUCHES

Soit un système de A nucléons ; si nous utilisons le modèle en couches à nucléon célibataire, l'équation de Schrödinger du système s'écrit :

$$(II, 5) \quad \frac{1}{2m} \left\{ \sum_{i=1}^A \vec{p}_i^2 + a^2 \hbar^2 \sum_{i=1}^A \vec{r}_i^2 \right\} \Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = E \Phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$$

Les fonctions propres de cette équation forment un système complet. N'importe quelle fonction d'onde antisymétrique des A nucléons peut s'exprimer comme une superposition des fonctions propres de (II, 5).

En général, il faut superposer un grand nombre d'états pour obtenir une bonne représentation du système.

Si l'on divise les A nucléons en N groupes de n_i nucléons chacun ; alors on introduit dans (II, 5) les coordonnées et les moments cinétiques des centres de masse des amas, l'équation s'écrit :

$$(II, 6) \quad \left\{ \sum_{i=1}^N H_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m n_i} \vec{P}_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{a^2 \hbar^2 n_i}{2m} \vec{R}_i^2 \right\} \Phi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A) = E \Phi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A)$$

on a évidemment

$$\sum_{i=1}^N m_i = A$$

$$(II, 7) \quad \vec{P}_i = \sum_{d=1}^{m_i} \vec{p}_d$$

$$\vec{R}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{d=1}^{n_i} \vec{r}_d$$

l'hamiltonien H_i ne dépend que des coordonnées relatives et des moments cinétiques relatifs des nucléons du ième groupe.

Les fonctions propres de $(\Pi, 6)$ forment un système complet de fonctions propres. Tout état du système formé par les A nucléons peut se développer sur la base des solutions de $(\Pi, 6)$. Ce développement sera d'autant plus limité que le choix des amas est proche de la réalité du système.

On passe d'une équation à l'autre par un changement de variables uniquement. Cela veut dire que toute fonction propre d'une équation ne se développe que sur la base des fonctions (dégénérées) propres de l'autre équation qui ont la même valeur propre.

Le choix des amas de nucléons dans $(\Pi, 6)$ se base sur des considérations analogues à celles qui sont la base du modèle de Wheeler. En particulier, le principe d'exclusion de Pauli et le fait que les nucléons soient indiscernables restreignent de beaucoup le choix des amas à prendre en considération.

D'autre part, les considérations énergétiques font que les amas constitués par des nombres magiques de nucléons sont hautement favorisés (He^4 , O^{16}).

Mais on doit se garder de donner une signification physique trop grande aux amas servant à bâtir la fonction d'onde. Si l'on choisit le modèle α -d pour le Li^6 , cela ne signifie pas qu'il y a une particule He^4 et un deutéron dans le noyau. Cela signifie que pour 6 nucléons non excités, indiscernables en échange perpétuel, les états tels que quatre d'entr'eux se présentent avec les caractéristiques de spin, de spin isobarique et de symétrie d'une particule α ; tels que les deux restant ont celles du deutéron; présentent un bilan énergétique beaucoup plus favorable et qu'ils participent davantage que les autres groupements aux propriétés du noyau.

Nous pensons que les fonctions antisymétrisées du modèle en groupes de résonnance donnent une bonne représentation des noyaux, surtout que, soumises au principe variationnel, elles incluent automatiquement des mélanges de configuration et des effets collectifs.

C - CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'ONDES

1) Nous allons d'abord étudier le problème à 2 nucléons. Talmi (60) a développé un calcul analogue pour les intégrales de potentiel du modèle en couches.

Soient deux particules identiques, indépendantes dans un même potentiel harmonique, leur hamiltonien s'écrit :

$$(II, 8) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_{\vec{r}_1}^2 + \nabla_{\vec{r}_2}^2) + \frac{1}{2} k (\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2)$$

Selon la méthode classique, on sépare les coordonnées du centre de masse et les coordonnées relatives

$$(II, 9) \quad H = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2(2m)} \nabla_{\vec{R}_{12}}^2 + \frac{1}{2} (2k) R_{12}^2 \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2(\frac{m}{2})} \nabla_{\vec{r}_{2,1}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} \right) r_{2,1}^2 \right\}$$

Avec

$$(II, 10) \quad \vec{r}_{2,1} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad ; \quad \vec{R}_{12} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

Les solutions propres de (II, 8) sont de la forme :

$$(II, 11) \quad \Phi(1,2) = \varphi_{n_1 l_1 m_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 l_2 m_2}(\vec{r}_2)$$

Les solutions propres de (II, 9) sont de la forme :

$$(II, 12) \quad \Phi'(1,2) = \varphi_{n'_1 l'_1 m'_1}(\vec{r}_{2,1}) \varphi_{NLM}(\vec{R}_{12})$$

On peut développer les premières sur la base complète des secondes

$$(II, 13) \quad \varphi_{n_1 l_1 m_1}(\vec{r}_1) \varphi_{n_2 l_2 m_2}(\vec{r}_2) = \sum a_{(n_1, l_1, m_1, n_2, l_2, m_2, n'_1, l'_1, m'_1, N, L, M)} \varphi_{NLM}(\vec{r}_{2,1}) \varphi_{n'_1 l'_1 m'_1}(\vec{R}_{12})$$

Les conditions de conservation du moment angulaire impliquent

$$a=0 \quad \text{si} \quad \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \neq \vec{l}_1 + \vec{L}$$

$$(II, 14) \quad \text{et si} \quad m_1 + m_2 \neq m'_1 + M$$

D'autre part $a = 0$ si la valeur propre de H n'est pas la même dans deux cas. L'énergie dans l'équation (II, 8) s'écrit :

$$(II, 15) \quad E = (2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 - 1) \hbar \omega_c \quad \text{avec} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si l'on remarque que :

$$(II, 16) \quad \omega_{R_{12}} = \sqrt{\frac{2k}{2m}} = \omega_c = \sqrt{\frac{k/2}{m/2}} = \omega_{nn}$$

La solution de (II, 9) est alors

$$(II, 17) \quad E = (2n'_1 + l'_1 + 2N + L - 1) \hbar \omega_c$$

$$\text{donc } a = 0 \text{ si } (II, 18) \quad 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 \neq 2n'_1 + l'_1 + 2N + L$$

2) Nous pouvons généraliser en regroupant A particules, dont l'hamiltonien s'écrit

$$(II, 19) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{i=1}^A \nabla_{\vec{r}_i}^2 \right) + \frac{1}{2} k \left(\sum_{i=1}^A \vec{r}_i^2 \right)$$

Le regroupement des nucléons 1 et 2 donne (cf. plus haut)

$$(II, 20) \quad H = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2(2m)} \nabla_{\vec{R}_{12}}^2 + \frac{1}{2} (2k) \vec{R}_{12}^2 \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\left(\frac{m}{2}\right)} \nabla_{\vec{r}_{2,1}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2}\right) \vec{r}_{2,1}^2 \right\} \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{i=3}^A \nabla_{\vec{r}_i}^2 \right) + \frac{1}{2} k \left(\sum_{i=3}^A \vec{r}_i^2 \right)$$

On continue le processus avec le nucléon 3. Dans H, seul H' est intéressé avec

$$(II, 30) \quad H'_{3,12} = -\frac{\hbar^2}{2(2m)} \nabla_{\vec{R}_{12}}^2 + \frac{1}{2} (2k) \vec{R}_{12}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}_3}^2 + \frac{1}{2} k \vec{r}_3^2$$

On définit

$$(II, 31) \quad \begin{cases} \vec{r}_{3,12} = \vec{r}_3 - \vec{R}_{12} = \vec{r}_3 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{R}_{123} = \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \end{cases}$$

Et l'on obtient :

$$(II, 32) \quad H'_{3,12} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2(2m)} \nabla_{\vec{R}_{123}}^2 + \frac{1}{2} (3k) \vec{R}_{123}^2 \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m(\frac{2}{3})} \nabla_{\vec{r}_{3,12}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} k\right) \vec{r}_{3,12}^2 \right\}$$

D'une manière générale, l'adjonction de la (i+1)ème particule revient à effectuer la transformation

$$(II, 33) \quad H'_{i+1,1,\dots,i} = -\frac{\hbar^2}{2(i+1)m} \nabla_{\vec{R}_{12\dots i}}^2 + \frac{1}{2} (ik) \vec{R}_{12\dots i}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}_{i+1}}^2 + \frac{1}{2} k \vec{r}_{i+1}^2$$

$$= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2(i+1)m} \nabla_{\vec{R}_{12\dots(i+1)}}^2 + \frac{1}{2} (i+1) k \vec{R}_{12\dots(i+1)}^2 \right\}$$

$$+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m(\frac{i}{i+1})} \nabla_{\vec{r}_{i+1,1\dots i}}^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{i}{i+1}\right) \vec{r}_{i+1,1\dots i}^2 \right\}$$

avec

$$(II, 34) \quad \begin{cases} \vec{R}_{1\dots(i+1)} = \frac{\sum_{l=1}^{i+1} \vec{r}_l}{i+1} \\ \vec{r}_{i+1,1\dots i} = \vec{r}_{i+1} - \frac{\sum_{l=1}^i \vec{r}_l}{i} \end{cases}$$

On remarque évidemment que

$$(II, 35) \quad (i+1) \vec{R}_{12\dots(i+1)}^2 + \frac{i}{i+1} \vec{r}_{i+1,1\dots i}^2 = \vec{r}_{i+1}^2 + i \vec{R}_{12\dots i}^2$$

L'hamiltonien du système de A nucléons s'écrit enfin :

$$(II, 36) \quad H = \sum_{i=1}^{A-1} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m \binom{i}{i+1}} \nabla_{\vec{r}_{i+1, 1 \dots i}}^2 + \frac{1}{2} \binom{i}{i+1} k \vec{r}_{i+1, 1 \dots i}^2 \right\} \\ + \left\{ -\frac{\hbar^2}{A(2m)} \nabla_{\vec{R}_{1 \dots A}}^2 + \frac{1}{2} A k \vec{R}_{1 \dots A}^2 \right\}$$

La deuxième partie de H représente l'hamiltonien du centre de masse.

Les fonctions propres de l'équation (II, 19) ont la forme :

$$(II, 37) \quad \Phi(1, \dots, A) = \prod_{i=1}^A \varphi_{m_i, l_i, m_i}(\vec{r}_i)$$

Celles de l'équation (II, 36)

$$(II, 38) \quad \Phi'(1, \dots, A) = \left\{ \prod_{i=1}^{A-1} \varphi'_{m'_i, l'_i, m'_i}(\vec{r}_{i+1, 1 \dots i}) \right\} \varphi'_{N, L, M}(\vec{R}_{1 \dots A})$$

Les mêmes considérations que celles vues pour le système à deux nucléons imposent les conditions

$$(II, 39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^A m_i = M + \sum_{i=1}^{A-1} m'_i \\ \sum_{i=1}^A \vec{l}_i = \vec{L} + \sum_{i=1}^{A-1} \vec{l}'_i \\ \sum_{i=1}^A 2m_i l_i = \left\{ \sum_{i=1}^{A-1} 2m'_i l'_i \right\} + 2N + L \end{array} \right.$$

De telle sorte que (II, 19), (II, 36) décrivent les A nucléons pour une même énergie et un même moment angulaire total

Déjà l'on peut noter que

$$(II, 40) \quad \Phi(1 \dots A) = e^{-\frac{a}{2} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i^2} \left\{ \prod_{i=1}^A g_{n_i l_i m_i}(\vec{r}_i) \right\}$$

où $g_{n_i l_i m_i}$ est un polynôme de degré $2(n_i-1)+l_i$ en $\vec{r}_i$

Et

$$(II, 41) \quad \Phi'(1 \dots A) = e^{-\frac{a}{2} \sum_{i=1}^{A-1} \left(\frac{i}{i+1}\right) \vec{r}_{i+1, 1 \dots i}^2} \left\{ \prod_{i=1}^{A-1} g'_{n'_i l'_i m'_i}(\vec{r}_{i+1, 1 \dots i}) \right\} \\ \times e^{-\frac{aA}{2} \vec{R}_{12 \dots A}^2} G_{N, L, M}(\vec{R}_{12 \dots A})$$

a est le paramètre classique des fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique

$$(II, 42) \quad a = \frac{m\omega_c}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mk}$$

3) Application à A nucléons dans l'état $(1s)$

Le principe de Pauli implique que l'on a $A \leq 4$.

Le cas $A = 4$ étant atteint par 2 protons de spin opposé, 2 neutrons de spin opposé : c'est le cas de He^4 dans son état fondamental.

Dans ce cas $n_i = 1, l_i = 0 \quad \forall i$

(II, 33) donne

$$(II, 43) \quad 2A = \left\{ \sum_{i=1}^{A-1} 2n'_i + l'_i \right\} + 2N + L$$

La seule solution possible entière est

$$(II, 44) \quad m'_i = 1, \quad l'_i = 0 \quad \forall i \quad ; \quad N=1, \quad L=0$$

Les polynômes $g'_{n'_i l'_i m'_i}$ et G_{NLM} sont de degré 0

Et la fonction d'onde des A nucléons est

$$(II, 45) \quad \Phi(1 \dots A) = N e^{-\frac{a}{2} \sum_{i=1}^{A-1} \frac{i}{i+1} \vec{r}_{i+1, 1 \dots i}^2} e^{-\frac{Aa}{2} \vec{R}_{12 \dots A}^2}$$

Deux remarques peuvent être faites :

- c'est exactement la fonction généralement utilisée dans les calculs de collision n'incluant que des systèmes de particules $(1s)^A$. Elle est identique à la fonction du modèle en couches à nucléons célibataires quant à la forme ; cependant nous verrons que le principe variationnel appliqué à "a" en tant que paramètre l'en éloigne.

- sous cette forme, nous avons séparé le mouvement du centre de gravité. Si le système des A nucléons est isolé, alors on peut le négliger : il représente un mouvement d'ensemble des nucléons. Si les A nucléons font partie d'un système plus large, il faut en tenir compte dans les liaisons entre amas.

4) Application à A nucléons dans l'état $1p$

Le principe de Pauli implique que l'on a $A \leq 12$. Cependant, dans les états peu excités les nucléons se regroupent en amas formant des sous-couches complètes ; il suffit d'étudier le cas $A \leq 4$.

Dans ce cas $(II, 46) \quad n_i = 1 \quad l_i = 1 \quad \forall i$

$(II, 33)$ donne comme condition

$$(II, 47) \quad 3A = 2N + L + \sum_{i=1}^{A-1} (2n'_i + l'_i)$$

Le nombre de solutions est beaucoup plus important. Comme nous avons séparé le mouvement du centre de gravité et le mouvement relatif, on peut les classer selon l'excitation interne du groupe des A nucléons.

Le groupe a l'excitation minimale si $l'_i = 0, n'_i = 1 \quad \forall i$

et $(II, 47)$ devient :

$$(II, 48) \quad A+2 = 2N + L$$

A = 1	une seule solution	N = 1	L = 1
A = 2	soit	N = 1	L = 2
	"	N = 2	L = 0
A = 3	soit	N = 1	L = 3
	"	N = 2	L = 1
A = 4	soit	N = 1	L = 4
	"	N = 2	L = 2
	"	N = 3	L = 0

Et la fonction d'onde s'écrit alors suivant la valeur de L choisie

$$(II, 49) \quad \Phi(1..A) = N e^{-\frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^{A-1} \frac{1}{i+1} \vec{r}_{i+1, 1..i}^2} e^{-\frac{\alpha A}{2} \vec{R}_{12..A}^2} P_A(|\vec{R}_{1..A}|) Y_{LM}(\Omega_A)$$

P_A est un polynôme de Laguerre de degré

$$(II, 50) \quad 2(N-1) + L = A \quad \forall L \text{ choisi}$$

5) Application: forme de la fonction d'espace des noyaux $(1s)^A (1p)^{A'}$

Si l'on a A nucléons dans l'état $1s$ et A' dans l'état $1p$; en regroupant les résultats du § 3 et du § 4 qui précèdent, nous avons obtenu une forme proche pour l'hamiltonien total de celle de l'équation (II, 6).

$$(II, 51) \quad H = \sum_{i=1}^{A-1} H_i + \sum_{i'=1}^{A'-1} H_{i'} - \frac{\hbar^2}{A(2m)} \nabla_{\vec{R}_{1\dots A}}^2 - \frac{\hbar^2}{A'(2m)} \nabla_{\vec{R}_{1'\dots A'}}^2 + \frac{1}{2} \hbar \left\{ A \vec{R}_{1\dots A}^2 + A' \vec{R}_{1'\dots A'}^2 \right\}$$

$$(II, 52) \quad H_i = -\frac{\hbar^2}{2m\left(\frac{i}{i+1}\right)} \nabla_{\vec{r}_{i+1, 1\dots i}}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{i+1}\right) \hbar \vec{r}_{i+1, 1\dots i}^2$$

Si nous séparons le mouvement du centre de gravité de l'ensemble $A + A'$, il vient

$$(II, 53) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{A-1} H_i + \sum_{i'=1}^{A'-1} H_{i'} - \frac{\hbar^2}{2m(A+A')} \nabla_{\vec{R}_{1\dots(A+A')}}^2 + \frac{1}{2} \hbar (A+A') \vec{R}_{1\dots(A+A')}^2 \\ &+ \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m\left(\frac{AA'}{A+A'}\right)} \nabla_{\vec{R}_{A,A'}}^2 + \frac{1}{2} \hbar \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_{A,A'}^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

$$(II, 54) \quad \text{avec} \quad \vec{R}_{A,A'} = \frac{\sum_{i=1}^A \vec{r}_i}{A} - \frac{\sum_{i'=1}^{A'} \vec{r}_{i'}}{A'}$$

Soit L, N les nombres quantiques associés au centre de masse des A nucléons,

Soit L', N' les nombres quantiques associés au centre de masse des A' nucléons.

Soient $(L_T, N_T), (L_R, N_R)$ les nombres quantiques associés respectivement au mouvement d'ensemble des $A + A'$ nucléons et au mouvement relatif.

On a toujours :

$$(II, 55) \quad 2N + L + 2N' + L' = 2N_R + L_R + 2N_T + L_T$$

Si nous éliminons les états comportant une excitation du centre de masse :

$$(II, 56) \quad 2N + L + 2N' + L' = 2N_R + L_R + 2$$

Dans le cas qui nous intéresse $N = 1 \quad L = 0$ pour les A nucléons (1s)

$$(II, 57) \quad \begin{cases} 2N' + L' = A' + 2 \\ 2N_R + L_R = A' + 2 \end{cases}$$

Les fonctions d'ondes des noyaux $(1s)^A (1p)^{A'}$ ont la forme

$$(II, 58) \quad \Phi(1, 2, \dots, A+A') = N e^{-\frac{\alpha}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{A-1} \frac{i}{i+1} \vec{r}_{i+1,1 \dots i}^2 + \sum_{i'=1}^{A'-1} \frac{i'}{i'+1} \vec{r}_{i'+1,1 \dots i'}^2 + \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_{A,A'}^2 \right\}} \\ \times P_{A'}(|\vec{R}_{A,A'}|) Y_{L_R M_R}(\Omega_R)$$

On a laissé de côté le mouvement du centre de gravité.

Donc jusqu'ici, le modèle en groupes de résonnance diffère peu du modèle en couches à nucléon célibataire. Cependant, nous n'avons ni introduit les spins, ni antisymétrisé ces fonctions ; dans le modèle en amas "a" est un paramètre variationnel que l'on optimise.

L'antisymétrisation réduit de façon très notable les écarts entre les différents découpages en groupes que l'on peut faire pour un même noyau.

D'autre part, le principe variationnel provoque de façon implicite les mélanges de configuration ayant même parité.

Par exemple, considérons la fonction d'onde obtenue pour les noyaux $(1s)^A (1p)^{A'}$ (II, 58)

La liaison entre les 2 groupes de noyaux s'écrit :

$$(II, 59) \quad f_c(\vec{R}_A) = e^{-\frac{a}{2} \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_{A,A'}} P(|\vec{R}_{A,A'}|)$$

L'application de principe variationnel au paramètre "a" conduit à

$$(II, 60) \quad f_v(\vec{R}_A) = e^{-\frac{a'}{2} \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_{A,A'}} P(|\vec{R}_{A,A'}|)$$

On peut développer $f_v(\vec{R}_A)$ en série

$$(II, 61) \quad f_v(\vec{R}_A) = f_c(\vec{R}_A) \left\{ 1 + \frac{(a-a')}{2} \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_{A,A'} + \dots \right\}$$

Plus "a'" diffère de "a", plus il y a de termes non négligeables dans la série. Ces termes résultant du mélange de configurations d'ordre plus élevé.

Par conséquent, plus les paramètres variationnels diffèrent des paramètres issus du modèle en couches, plus l'étude du modèle en groupes est adaptée ; c'est le cas en particulier du Li^6 .

CHAPITRE III

LE POTENTIEL A DEUX CORPS

LES FONCTIONS D'ONDES TOTALES

- A - Le potentiel à deux corps
- B - L'antisymétrisation des fonctions d'ondes totales
- C - Le principe variationnel
- D - Expression des opérateurs

A - LE POTENTIEL A DEUX CORPS

Nous avons vu dans le chapitre d'introduction que le fait de nous intéresser à la réaction à 1 canal $n\text{-Li}^6$, nous limitait aux basses énergies. Ceci nous permet de choisir une formulation simple pour l'interaction nucléon-nucléon.

Un potentiel à deux corps de forme gaussienne peut rendre compte des phénomènes nucléaires à basse et même moyenne énergie. De plus la forme gaussienne permet de pousser assez loin les calculs de façon analytique.

Nous postulons donc l'interaction entre deux nucléons i et j (38)

$$(III, 1) \quad V_{ij} = (w W_{ij} + b B_{ij} + m M_{ij} + h H_{ij}) V_{ij} + \epsilon_{ij} \frac{e^{\lambda}}{\pi_{ij}}$$

$$V_{ij} = -V_0 e^{-r^2_{ij}}$$

$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ est la distance entre les deux nucléons.

Les opérateurs classiques :

W_{ij}	représente la partie directe du potentiel
B_{ij}	échange les spins des deux particules (Bartlett)
M_{ij}	échange les coordonnées d'espaces des deux particules (Majorana)
H_{ij}	échange à la fois les coordonnées d'espace et de spin

On a : $B_{ij} = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)$ $H_{ij} = B_{ij} M_{ij}$

Si l'on utilise le formalisme du spin isobarique : H'_{ij} échange les coordonnées de spin isobarique. Le principe de Pauli implique, si Ψ est une fonction convenablement antisymétrisée,

$$(III,2) \quad H'BM\Psi = -\Psi \quad \text{or} \quad HBM\Psi = \Psi \Rightarrow H_{ij} = -H'_{ij}$$

Les opérateurs d'échange s'écrivent :

$$(III,3) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j + 1) \quad H_{ij} = -\frac{1}{2} (1 + \vec{\tau}_i \vec{\tau}_j)$$

et $(III,4) \quad M_{ij} = -\frac{1}{4} (1 + \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j) (1 + \vec{\tau}_i \vec{\tau}_j)$

Cependant nous n'utiliserons pas le formalisme du spin isobarique ce qui permet de considérer protons et neutrons comme des particules différentes et de réduire la dimension de l'antisymétriseur.

Il reste 6 constantes à déterminer : w, m, b, h qui précisent l'importance relative de chaque type d'échange ; V_0 et ρ qui déterminent la profondeur et la portée du potentiel.

Il n'y a pas de moyens pour déterminer de façon unique cet ensemble de constantes.

Cependant on normalise :

$$(III,5) \quad w + m + b + h = 1$$

D'autre part, le rapport de l'interaction entre deux nucléons dans l'état (1S) d'une part à celle dans l'état (3S) d'autre part s'écrit :

$$(III,6) \quad \frac{w + m - b - h}{w + m + b + h} = w + m - b - h = x$$

Comme nous bâtissons notre modèle à partir de l'interaction nucléon-nucléon : le choix des paramètres V_0 et γ doit rendre compte le plus parfaitement possible :

- de l'énergie de liaison du deutéron
- du moment quadrupolaire du deutéron
- des sections efficaces des collisions nucléon-nucléon dans les états singulets et triplets.

Parmi tous les choix possibles de ces paramètres nous citerons et nous utiliserons :

$$1^{\circ}) (\text{III}, 7) \quad V_0 = 46,8 \text{ Mev} \quad \gamma = 0,2669 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2} \quad x = 0,6$$

Ces résultats ont été interpolés des travaux de Burke et utilisés avec succès par W. Laskar (38,39). Ils donnent de bons résultats pour les énergies de liaisons des noyaux légers.

Dans ce cadre, trois types de forces ont été utilisés :

- type de Serber (III,8) $w = m = \frac{1}{4} (1+x)$ $b = h = \frac{1}{4} (1-x)$
- Type de Biel (III,3) $w = b = \frac{2}{3}$ $m = \frac{5}{18} + \frac{x}{2}$ $h = \frac{5}{18} - \frac{x}{2}$
- Type de forces symétriques dit MHBW
(III,10) $m = 2b = \frac{1}{3} (1+3x)$ $h = 2w = \frac{1}{3} (1-x)$

$$2^{\circ}) (\text{III}, 11) \quad V_0 = 72,98 \text{ Mev} \quad \gamma = 0,46 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2} \quad x = 0,64$$

Il a été utilisé par Tang, Schmid, Wildermuth dans la collision $\text{He}^3 - \text{He}^4$ par exemple (62). Avec un choix des paramètres w , m , b , h très proche du type de Serber.

$$3^{\circ}) \text{ (III, 12) } V_0 = 68,6 \text{ Mev} \quad \rho = 0,416 \cdot 10^{+26} \text{ cm}^{-2} \quad x = 0,64$$

Préconisés par Wildermuth et Kanellopoulos (68), ces paramètres ont été utilisés dans l'étude des niveaux d'énergie des noyaux légers.

Toutefois, il faut noter qu'il n'est pas possible de trouver un potentiel central, sans coeur répulsif, qui satisfasse à la fois aux collisions nucléon-nucléon et à la saturation des forces nucléaires.

Ainsi les types de potentiel du §2° et du §3° satisfont mieux à la diffusion que celui du §1°, mais donne une énergie de liaison trop forte avec une densité de nucléons trop grande. Dans ce cas, au lieu d'appliquer le principe variationnel au calcul de l'énergie de liaison, on fixe le rayon carré moyen à une valeur proche de la valeur expérimentale.

B - LES FONCTIONS D'ESSAI ANTISYMETRIQUES

Du chapitre II, nous pouvons déduire les formes des fonctions d'espaces pour les noyaux $(1s)^A$, $(1p)^{A'}$. Le couplage L-S est prédominant pour les noyaux qui nous intéressent Kurath (34), aussi l'introduction des fonctions de spin ne pose aucun problème.

- Introduction des paramètres variationnels

Si l'on considère la fonction d'espace $(\Pi, 58)$, 3 paramètres sont liés dans la fonction issue du modèle en couches à nucléons célibataires ; nous allons les faire varier indépendamment afin de mieux adapter le modèle. Ces 3 paramètres, en première approximation influent respectivement, sur les caractéristiques de l'amas $(1s)^A$ de nucléons sur les caractéristiques de l'amas $(1p)^{A'}$ de nucléons, enfin sur le degré d'interpénétration de ces deux amas.

Pour prendre une notation mieux adaptée, et qui ne change rien au fond du problème, nous introduisons les variables

$$\begin{aligned}
 & \text{(III, 13)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq p \leq A-1 \\ A+1 \leq p \leq A+A'-1 \end{array} \right. \quad \begin{aligned} \vec{R}_p &= \vec{r}_p - \frac{\sum_{i=p+1}^A \vec{r}_i}{A-p} \\ \vec{R}_p &= \vec{r}_p - \frac{\sum_{i=p+1}^{A+A'} \vec{r}_i}{A+A'-p} \end{aligned} \\
 & \quad \vec{R}_A = \frac{\sum_{i=A+1}^{A+A'} \vec{r}_i}{A'} - \frac{\sum_{i=1}^A \vec{r}_i}{A}
 \end{aligned}$$

$\vec{r}_i$ est la position du $i^{\text{ème}}$ nucléon, ceux-ci étant numérotés de 1 à $A + A'$.

La fonction d'espace avec les paramètres variationnels $\lambda, \lambda', \lambda''$ s'écrit :

$$(III, 14) \quad \Phi(12 \dots A, A+1 \dots A+A') = N f(|\vec{R}_A|) e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^{A-1} \frac{A(A-p)}{A-p+1} \vec{R}_p^2 - \frac{\lambda''}{2} \sum_{p=A+1}^{A+A'-1} \frac{A'(A+A'-p)}{(A+A'-p+1)} \vec{R}_p^2} \\ \times e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_A^2} \quad Y_{LM}(\mathcal{L}_A)$$

ce qui revient à poser si l'on compare (III, 14) à (II, 58)

$$\lambda = a/A$$

(III, 15)

$$\lambda'' = a/A'$$

$$\lambda' = a(A+A')/AA'$$

On peut obtenir (III, 14) par diagonalisation de

$$(III, 16) \quad \Phi = N f(|\vec{R}_A|) e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_A^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{1 \leq i < j}^A R_{ij}^2 - \frac{\lambda''}{2} \sum_{A+1 \leq i < j}^{A+A'} R_{ij}^2} \quad Y_{LM}(\mathcal{L}_A) \quad (35)$$

Le principe de Pauli implique - puisque nous n'utilisons pas le formalisme du spin isobarique - que la fonction totale soit antisymétrique pour l'échange d'une paire quelconque de nucléons ; échange portant sur les coordonnées d'espace et celles de spin.

Parmi les opérateurs d'échange, on distingue deux classes :

- les opérateurs agissant à l'intérieur d'un amas
- les opérateurs provoquant un mélange entre les 2 amas.

Heureusement, comme il n'y a pas plus de 4 nucléons dans un amas

et que la fonction d'espace est totalement symétrique pour un amas donné, il suffit d'antisymétriser les fonctions de spins pour les nucléons de même nature (ce qui est toujours possible) pour obtenir une fonction totalement antisymétrique, à l'intérieur d'un amas donné.

D'où les fonctions de spins pour des amas de :

$$2 \text{ nucléons} \quad \sigma_1^1(12) = \alpha_1 \alpha_2 \quad (1 \text{ proton}, 1 \text{ neutron})$$

$$3 \text{ nucléons} \quad \sigma_{1/2}^{1/2}(123) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \alpha_2$$

avec nucléons $(1, 3)$, 2 protons ou 2 neutrons suivant le cas

$$4 \text{ nucléons} \quad \sigma_0(1234) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) (\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2)$$

avec (13) paire de protons
 (24) paire de neutrons

L'antisymétrisation ne portera que sur des paires de nucléons d'amas différents.

- Les fonctions d'essai

Donc, un système constitué de deux amas de nucléons sans excitation interne admet comme fonction d'onde

$$(III, 17) \quad \Phi_{NLM}^{\vec{s}+\vec{s}'}(12 \dots A, A+1 \dots A+A') = N A f(|\vec{R}_A|) e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{p=1}^{A-1} \frac{A(A-p)}{A-p+1} \vec{R}_p^2} \\ \times e^{-\frac{\lambda''}{2} \sum_{p=A+1}^{A+A'-1} \frac{A'(A+A'-p)}{A+A'-p+1} \vec{R}_p^2 - \frac{\lambda'}{2} \vec{R}_A^2} Y_{LM}(\vartheta_A) \sigma_s(1, \dots A) \sigma_{s'}(A+1, \dots A+A')$$

où N est un facteur de normalisation et $\mathcal{A}$ l'antisymétriseur défini plus haut.

Fonction que l'on peut écrire sous une forme condensée :

$$(IV, 18) \quad \Phi_{N,L,M}^{\vec{s}+\vec{s}'}(1 \dots A, A+1 \dots A+A') = \mathcal{A} \varphi_{NLM}^{\vec{s}\vec{s}'}(1 \dots A, A+1 \dots A+A')$$

Le problème se pose ensuite de choisir $f(|\vec{R}_A|)$, nous savons (II, 50) que c'est un polynôme de degré A' . Dans la plupart des cas, il y a ambiguïté car il y a plusieurs couples N, L satisfaisant aux conditions (II, 33). Cependant, on peut prévoir que le niveau fondamental sera celui avec L minimum, et tous les calculs concordent sur ce point.

Et la liaison entre amas s'écrit

$$(III, 19) \quad f(|\vec{R}_A|) Y_{LM}(\Omega_A) = |\vec{R}_A|^{A'} Y_{L'M'}(\Omega_A)$$

avec $L' = 0$ si A' est pair
 $L' = 1$ si A' est impair

En accord total avec la parité observée des niveaux fondamentaux. On ne tient compte dans le polynôme que du terme de degré le plus élevé. Les autres termes ayant peu d'importance en raison de l'antisymétrisation (69).

C - LE PRINCIPE VARIATIONNEL

Avec le potentiel à deux corps défini au §A de ce chapitre (II, 1), l'hamiltonien des $(A + A')$ nucléons répartis en deux amas s'écrit :

$$(III, 20) \quad H = \sum_{i=1}^{A+A'} T_i + \sum_{i=1}^{A+A'} \sum_{j>i}^{A+A'} V_{ij}$$

T_i est l'opérateur d'énergie cinétique relatif à la $i^{\text{ème}}$ particule.

Comme il est impossible d'obtenir une solution analytique de l'équation de Schrödinger d'un tel système, le principe variationnel est appliqué aux fonctions d'essai du §B de ce chapitre (III, 17) ; on obtient une valeur de l'énergie du système en fonction des 3 paramètres :

$$(III, 21) \quad E(\lambda, \lambda', \lambda'') = \frac{\int \Phi^\dagger H \Phi d\tau}{\int \Phi^\dagger \Phi d\tau}$$

Soient $\lambda_0, \lambda'_0, \lambda''_0$, les valeurs explicites de ces paramètres qui rendent $E(\lambda, \lambda', \lambda'')$ stationnaire, alors $\Phi(\lambda_0, \lambda'_0, \lambda''_0)$ est vecteur propre de H qui satisfait à :

$$(III, 22) \quad \{ H - E(\lambda_0, \lambda'_0, \lambda''_0) \} | \Phi(\lambda_0, \lambda'_0, \lambda''_0) \rangle = 0$$

Cependant on peut simplifier les calculs, en notant que H est l'hamiltonien de nucléons identiques donc invariant par une permutation quelconque des nucléons.

En particulier, (44)

$$(III, 23) \quad [A, H] = 0$$

or A l'antisymétriseur est un opérateur hermitien avec

$$(III, 24) \quad A^2 = A \quad \text{et} \quad \Phi = A\varphi$$

alors

$$\int \Phi^+ \Phi d\tau = \int (A\varphi)^+ (A\varphi) d\tau = \int \varphi^+ A^2 \varphi d\tau = \int \varphi^+ \Phi d\tau$$

et

$$\int \Phi^+ H \Phi d\tau = \int \varphi^+ A (H \Phi) d\tau = \int \varphi^+ H (A \varphi) d\tau = \int \varphi^+ H \Phi d\tau$$

donc

$$(III, 25) \quad E(\lambda, \lambda', \lambda'') = \frac{\int \varphi^+ H \Phi d\tau}{\int \varphi \Phi d\tau}$$

D - LES OPERATEURS

Le calcul variationnel proprement dit nécessite le calcul de la valeur moyenne de 3 opérateurs.

1°) L'opérateur énergie cinétique

$$(III, 26) \quad O_{KE} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{A+A'} \nabla_{\vec{r}_i}^2$$

Mais la transformation effectuée au § C du chapitre II, nous donne une expression qui élimine le centre de gravité. Avec nos notations (III, 13), il vient :

$$(III, 27) \quad O_{KE} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sum_{p=1}^{A-1} \frac{A-p+1}{A-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 + \sum_{p=A+1}^{A+A'-1} \frac{A+A'-p+1}{A+A'-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 + \frac{A+A'}{AA'} \nabla_{\vec{R}_A}^2 \right\}$$

2°) L'opérateur énergie coulombienne

Pour chaque paire de protons

$$(III, 28) \quad O_c = \frac{e^2}{r_{ij}} \quad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

Cet opérateur a deux caractéristiques :

- c'est un potentiel à longue portée, donc moins affecté par l'antisymétrisation (Tang et autres 61)

- il intervient très faiblement dans l'énergie des états liés.

On se contente de calculer, l'énergie coulombienne avec la fonction d'onde non antisymétrisée :

$$(III, 24) \quad E_c = \frac{e^2}{\int \psi^* \psi d\tau} \sum \int \psi^* a_c \psi d\tau$$

L'erreur ainsi induite ne dépasse pas 10 % de l'énergie coulombienne ainsi que nous l'avons vérifié dans quelques cas particuliers (61).

3°) Les opérateurs d'énergie potentielle

Après intégration sur les variables de spin, nous obtenons un ensemble d'intégrales du type :

$$(III, 23) \quad \langle \psi | V_{ij} | P_{kl}, P_{mn} \dots \psi \rangle$$

Il y a $(A + A')(A + A' - 1)$ opérateur du type $V_{ij} = -V_0 e^{-r_{ij}^2}$; d'autre part, si l'on tient compte du fait que la fonction d'espace est invariante pour n'importe quelle permutation de nucléons à l'intérieur d'un même amas, il reste AA' opérateurs qui permutent les nucléons d'amas différents.

En lère approximation, il y aurait $AA'(A + A')(A + A' - 1)$ intégrales de potentiel d'échange à calculer. Heureusement, en utilisant à fond les propriétés d'invariance, on réduit le nombre d'intégrales réellement différentes à 1 dizaine environ.

Pour ce calcul, il est nécessaire d'exprimer r_{ij}^2 en fonction du nouveau système (III, 13)

On obtient les relations inverses, en prenant le centre de gravité comme origine

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & 1 \leq p \leq A \\ & \vec{r}_p = -\frac{A'}{A+A'} \vec{R}_A + \frac{A-p}{A-p+1} \vec{R}_p - \frac{\vec{R}_{p-1}}{A-p+2} - \frac{\vec{R}_{p-2}}{A-p+3} \dots - \frac{\vec{R}_1}{A} \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned} & (III, 14) \quad A+1 \leq p \leq A+A' \\ & \vec{r}_p = \frac{A}{A+A'} \vec{R}_A + \frac{A+A'-p}{A+A'-p+1} \vec{R}_p - \frac{\vec{R}_{p-1}}{A+A'-p+2} \dots - \frac{\vec{R}_{A+1}}{A'} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

et on en déduit la valeur

$$r_{ij}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 \quad \forall i \text{ et } j$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} & 1 \leq i \leq A, \quad 1 \leq i+k \leq A \\ & \vec{r}_i - \vec{r}_{i+k} = -\frac{A-(i+k)}{A-(i+k)+1} \vec{R}_{i+k} + \frac{\vec{R}_{i+k-1}}{A-(i+k)+2} + \dots + \vec{R}_i \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned} & (III, 15) \quad A+1 \leq i \leq A+A', \quad A+1 \leq i+k \leq A+A' \\ & \vec{r}_i - \vec{r}_{i+k} = -\frac{A+A'-(i+k)}{A+A'-(i+k)+1} \vec{R}_{i+k} + \frac{\vec{R}_{i+k-1}}{A+A'-(i+k)+2} + \dots + \vec{R}_i \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned} & 1 \leq i \leq A, \quad A+1 \leq j \leq A+A' \\ & \vec{r}_i - \vec{r}_j = -\vec{R}_A + \frac{A-i}{A-i+1} \vec{R}_i - \frac{\vec{R}_{i-1}}{A-i+2} - \dots - \frac{\vec{R}_1}{A} - \frac{A+A'-j}{A+A'-j+1} \vec{R}_j + \frac{\vec{R}_{j-1}}{A+A'-j+2} + \dots + \frac{\vec{R}_{A+1}}{A'} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Il est à noter que le cas particulier $\mu = 0$ donne les intégrales de normalisation au facteur $-V_0$ près.

Outre ces trois opérateurs, nous calculerons le rayon carré moyen du noyau. C'est une valeur aisée à comparer aux valeurs expérimentales tirées surtout des collisions électron-noyau, elle nous renseigne sur la taille du noyau et permet même

de fixer les paramètres variationnels lorsque les minima de l'énergie de liaison sont flous ou inexistants.

On le calcule

$$(III, 16) R_{RMS} = \left\{ \frac{1}{A+A'} \int \psi^+ \left| \sum_{i=1}^{A+A'} \vec{r}_i \right| A \psi d\tau \right\}^{1/2}$$

avec notre changement de variable, l'opérateur O_{RMS} s'écrit :

$$(III, 17) O_{RMS} = \frac{AA'}{A+A'} \vec{R}_A + \sum_{p=1}^{A-1} \frac{A-p}{A-p+1} \vec{R}_p + \sum_{p=A+1}^{A+A'-1} \frac{A+A'-p}{A+A'-p+1} \vec{R}_p$$

et

$$(III, 18) R_{RMS} = \left\{ \frac{1}{A+A'} \int \psi^+ O_{RMS} \psi d\tau \right\}^{1/2}$$

CHAPITRE IV

LES ENERGIES DE LIAISON

- A - Introduction
- B - Calcul des coefficients des intégrales de potentiel
- C - Regroupement des intégrales d'espace
- D - Tests pour la vérification du calcul des coefficients
- E - Méthodes de calcul des intégrales d'espace
- F - Résultats pour le Li^6

A - INTRODUCTION

Les noyaux tels que $A \leq 8$ sont évidemment ceux pour lesquels le modèle en groupes de résonance est le plus facilement adaptable.

Etant donné la très grande stabilité de la particule la structure (α + nucléons restants) est prédominante. De plus on peut montrer par calcul direct (69) que les autres partitions possibles sous l'influence de l'antisymétrisation sont quasi équivalentes. Le problème peut se poser pour le Li^6 dans lequel l'amas à structure de deutéron a une énergie de liaison de 2,2 Mev alors qu'il est lié à l'amas α par une énergie du même ordre de grandeur. Cependant Wildermuth et Mac Lure ont développé un raisonnement qualitatif qui montre que les amas à structure de deutéron sont plus liés dans un noyau que lorsqu'ils sont indépendants. Nous aurons donc toujours :

$$A = 4$$

Dans ce chapitre nous nous intéresserons au calcul explicite des différentes parties de l'hamiltonien, pour en arriver aux résultats quant à l'énergie de liaison.

Dès maintenant, nous introduisons les notations que nous conserverons tout au long de ce travail

$\langle |B| ij, kl \dots \rangle$ signifie la valeur moyenne de l'opérateur B, l'intégration portant sur les variables d'espace et de spin. Le "BRA" $\langle |$ est constitué par la partie directe de la fonction d'onde, le "KET" $|ij, kl \dots \rangle$ est constitué par la fonction d'onde où les nucléons $(i, j,) (k, l) \dots$ ont été permutés.

$((|B| ij, kl \dots))$ signifie que l'intégration sur les spins a déjà été effectuée, et qu'il ne reste plus qu'à intégrer sur les variables d'espace.

B - CALCUL DES COEFFICIENTS DES INTEGRALES DE POTENTIEL

Le calcul des intégrales :

$$(IV,1) \langle |U_{ij}|^{kl,mn\dots} \rangle = \langle |V_{ij}(wW_{ij} + mM_{ij} + bB_{ij} + hH_{ij})|^{kl,mn\dots} \rangle$$

conduit après intégration sur les spins à des expressions du genre

$$(IV,2) \quad V = \langle |U_{ij}|^{kl,mn\dots} \rangle = a_w w ((|ij|^{kl,mn\dots})) + a_b b ((|ij|^{kl,mn})) \\ + a_m m ((|ij|^{ij,kl,mn\dots})) + a_h h ((|ij|^{ij,kl,mn\dots}))$$

Il existe des relations générales qui lient les coefficients numériques a_w, a_b, a_m, a_h . On peut s'en servir soit pour induire des résultats sans calcul, ou mieux pour vérifier la validité des résultats obtenus.

1°) comme les a_i ne dépendent que de l'action des opérateurs de type Bartlett

$$a_w = a_m \quad \text{et} \quad a_b = a_h$$

$$(IV,3) \quad \text{alors} \quad V = (a_w w + a_b b) ((|ij|^{kl,mn\dots})) + (a_w m + a_b h) ((|ij|^{ij,kl,mn\dots}))$$

2°) Suivant le résultat de l'action des M_{ij} sur la fonction d'espace, deux cas peuvent se présenter :

- M_{ij} laisse invariante cette fonction d'espace :

$$(IV,4) \quad ((|ij| ij, kl, mn \dots)) = ((|ij| kl, mn \dots))$$

alors (IV,3) devient :

$$(IV,5) \quad V = \{a_w(w+m) + a_b(b+h)\} ((|ij| kl, mn \dots))$$

- ou au contraire

$$(IV,6) \quad ((|ij| kl, mn \dots)) \neq ((|ij| ij, kl, mn \dots))$$

a) si $P_{ij} \in \mathcal{H}$, dans le calcul intervient

$$(IV,7) \quad \begin{aligned} V' &= - \langle |U_{ij}| ij, kl, mn \dots \rangle \\ &= -(a'_w w + a'_b b) ((|ij| ij, kl, mn \dots)) - (a'_w m + a'_b h) ((|ij| kl, mn \dots)) \end{aligned}$$

En faisant $V + V'$ il vient :

$$(IV,8) \quad \begin{aligned} V + V' &= \{a_w w + a_b b - a'_w m - a'_b h\} ((|ij| kl, mn \dots)) \\ &\quad + \{-a'_w w - a'_b b + a_w m + a_b h\} ((|ij| ij, kl, mn \dots)) \end{aligned}$$

b) Si $P_{ij} \notin \mathcal{H}$ au prix d'une renumérotation d'ensemble des nucléons

$$(IV,9) \quad V' = - \langle |U_{ij}| ij, kl, mn \dots \rangle = - \langle |U_{i'j'}| i'j', k'l', m'n' \dots \rangle$$

avec $P_{i'j'}, P_{k'l'}, P_{m'n'} \in \mathcal{H}$ et l'on obtient le même résultat.

3°) Soit

$$(IV,10) \quad \begin{aligned} V &= \langle |U_{ij}| kl, mn \dots \rangle \\ V &= \langle |kl, mn - U_{i'j'}| kl, mn \dots \rangle, \quad (i'j') = \dots P_{mn} P_{kl} (ij) \end{aligned}$$

Les opérateurs de permutation sont unitaires (44)

$$(\text{IV}, 11) \quad V = \langle \dots mn, kl | U_{ij} | \dots mn, kl \rangle = \langle | U_{ij} | \dots mn, kl \rangle$$

car U_{ij} est hermitique et les fonctions sont réelles.

Nous dirons selon la notation de W. Laskar (39)

$$\begin{array}{l} \text{que} \\ (\text{IV}, 12) \end{array} \quad \langle | U_{ij} | kl, mn \dots \rangle = \langle | U_{ij'} | \dots mn, kl \rangle \quad \text{sont adjoints}$$

et auto adjoints si $(i, j) \equiv (i', j')$

de (IV, 10) il découle immédiatement que ces deux opérateurs ont même coefficient d'échange.

C - REGROUPEMENT DES INTEGRALES D'ESPACE

Le calcul des intégrales de spin conduit à des combinaisons linéaires d'intégrales d'espace aussi bien pour l'énergie d'échange que pour l'énergie cinétique et la normalisation.

Ces intégrales sont très nombreuses mais le fait que les fonctions d'espace soient symétriques pour un amas donné permet de réduire le nombre de celles à calculer effectivement.

Toutes les intégrales d'espace se présentent sous la forme :

$$(IV,11) \quad I = ((|F|_{kl,mn} \dots)) \quad F \text{ opérateur quelconque}$$

Quand on ne considère que deux amas, ces permutations (kl) , $(mn) \dots$ sont toujours disjointes. Ce qui n'est pas le cas pour trois amas et plus (cf $n\text{-Li}^6$).

Soit (pq) une permutation des nucléons p et q

$$(IV,12) \quad I = (((pq)(pq) | F |_{kl,mn} \dots))$$

(pq) est un opérateur unitaire hermitien $(pq) = (pq)^{-1} = (pq)^{\dagger}$

$$(IV,13) \quad I = ((p_q | p_q F | p_q, kl, mn \dots))$$

Pour conserver la forme $(IV,11)$ nous ne prendrons que les permutations tels que p et q sont des nucléons d'un même amas, alors

$$(IV, 14) \quad I = \left(\left(|p_9| F | p_9, \ell \ell, mn \dots \right) \right)$$

Cette méthode est appliquée à chaque fois. Les intégrales se ramènent à 4 classes possibles avec $A = 4$

pas d'échange $((|F| D))$

1 échange $((|F| 15)) \quad 1 \leq A' \leq 4$

2 échanges $((|F| 15, 26)) \quad 2 \leq A' \leq 4$

3 échanges $((|F| 15, 26, 37)) \quad A' = 3$

4 échanges ne sont possibles que pour B_8^8 , mais cela revient à permuter entièrement les deux α , et on retrouve une intégrale directe.

$$\begin{aligned} \text{De même : } ((|F| 15, 26, 37)) &= ((48 |(48)F| 15, 26, 37, 48)) \\ &= \pm ((|45|F| 15)) \end{aligned}$$

$F = 1$ donne les intégrales de normalisation

$F = O_{KE}$ opérateur d'énergie cinétique donne les intégrales cinétiques.

Ces deux opérateurs sont invariants pour une renumérotation quelconque des nucléons.

Mais si $F = -V_0 e^{-r/r_0}$ ces classes se subdivisent; ce qui donne pour les intégrales de potentiel, la table de la page suivante :

Intégrales directes

$$\begin{aligned} &\langle |34|D \rangle \\ &\langle |15|D \rangle \\ &\langle |A'+4, A'+3|D \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{34}^2 &= \vec{R}_3^2 \\ R_{15}^2 &= \left(-\frac{3\vec{R}_1}{4} + \vec{R}_4 + \frac{A'-1}{A'} \vec{R}_5 \right)^2 \\ R_{A'+4, A'+3}^2 &= \vec{R}_{A'+3}^2 \end{aligned}$$

Intégrales de simple échange

$$\begin{aligned} &\langle |12|15 \rangle \\ &\langle |34|15 \rangle \\ &\langle |15|15 \rangle \\ &\langle |16|15 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |26|15 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |A'+4, A'+3|15 \rangle \quad \text{si } A' = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= \left(\vec{R}_1 - \frac{2}{3} \vec{R}_2 \right)^2 \\ R_{34}^2 &= \vec{R}_3^2 \\ R_{15}^2 &= \left(-\frac{3\vec{R}_1}{4} + \vec{R}_4 + \frac{A'-1}{A'} \vec{R}_5 \right)^2 \\ R_{16}^2 &= \left(-\frac{3\vec{R}_1}{4} + \vec{R}_4 + \frac{A'-2}{A'-1} \vec{R}_6 - \frac{R_5}{A'} \right)^2 \\ R_{26}^2 &= \left(\frac{\vec{R}_1}{4} - \frac{2}{3} \vec{R}_2 + \vec{R}_4 + \frac{A'-2}{A'-1} \vec{R}_6 - \frac{R_5}{A'} \right)^2 \\ R_{A'+4, A'+3}^2 &= \vec{R}_{A'+3}^2 \end{aligned}$$

Intégrales de double échange

$$\begin{aligned} &\langle |12|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |23|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |34|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |15|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' \geq 2 \\ &\langle |37|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' \geq 3 \\ &\langle |67|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' = 3 \\ &\langle |78|15, 26 \rangle \quad \text{si } A' = 4 \text{ alors} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= \left(\vec{R}_1 - \frac{2}{3} \vec{R}_2 \right)^2 \\ R_{23}^2 &= \left(\vec{R}_2 - \frac{1}{2} \vec{R}_3 \right)^2 \\ R_{34}^2 &= \vec{R}_3^2 \\ R_{15}^2 &= \left(-\frac{3\vec{R}_1}{4} + \vec{R}_4 + \frac{A'-1}{A'} \vec{R}_5 \right)^2 \\ R_{37}^2 &= \left(\frac{\vec{R}_1}{4} + \frac{\vec{R}_2}{3} - \frac{\vec{R}_3}{2} + \vec{R}_4 - \frac{\vec{R}_5}{A'} - \frac{\vec{R}_6}{A'-1} + \frac{A'-3}{A'-2} \vec{R}_7 \right)^2 \\ R_{67}^2 &= \left(\vec{R}_6 - \frac{A'-3}{A'-2} \vec{R}_7 \right)^2 \\ \langle |78|15, 26 \rangle &= \langle |34|15, 26 \rangle \end{aligned}$$

Intégrales de triple échange

$$\begin{aligned} &\langle |12|15, 26, 37 \rangle \quad \text{si } A' = 3 \\ &\langle |34|15, 26, 37 \rangle \quad \text{si } A' = 3 \\ &\langle |15|15, 26, 37 \rangle \quad \text{si } A' = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= \left(\vec{R}_1 - \frac{2}{3} \vec{R}_2 \right)^2 \\ R_{34}^2 &= \vec{R}_3^2 \\ R_{15}^2 &= \left(-\frac{3\vec{R}_1}{4} + \vec{R}_4 + \frac{A'-1}{A'} \vec{R}_5 \right)^2 \end{aligned}$$

D - TESTS POUR LA VERIFICATION DU CALCUL DES COEFFICIENTS

Une fois, terminé le calcul des coefficients des intégrales, effectué le regroupement de celles qui sont identiques, nous obtenons la valeur de l'énergie de liaison pour le noyau considéré. Il n'est pas possible de l'avoir sous une forme analytique comme lorsque $A \leq 4$. Nous donnerons au § F une formulation pour un cas particulier ; au § E nous verrons les méthodes de calcul numérique qui permettent d'obtenir les résultats du § F sur Li^6

Cependant avant de passer aux calculs, il faut être sûr de la justesse des coefficients qui modulent le mélange des différentes types d'interaction. Une méthode que nous allons développer ci-dessous nous permet une vérification aisée et très utile dans le cas du $n-Li^6$ où il y a plus de 100 interactions.

Soit

$$AN = \langle \varphi | A \varphi \rangle$$

$$(IV, 15) \quad = a_0 \langle 0 \rangle + a_1 ((15)) + a_2 ((15, 26)) + a_3 ((15, 26, 37))$$

après intégration sur les spins.

On se place volontairement dans l'approximation :

$$(IV, 16) \quad T_i = ((|pq|kl \dots)) \equiv ((|p'q'|kl \dots)) \quad \forall p, q, p', q'$$

$i = 0, 1, \dots, 3$ suivant le nombre d'échanges.

- Potentiel de Wigner

Dans cette approximation

$$(IV, 17) \quad W_i T_i = w \sum_{p=1}^{A+A'} \sum_{p < q}^{A+A'} \langle |pq| kl \dots \rangle$$

$$W_i = \frac{(A+A')(A+A'-1)}{2} w a_i$$

- Potentiel de Bartlett

$$(IV, 18) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_i T_i = b \sum_{p=1}^{A+A'} \sum_{p < q}^{A+A'} \langle B_{pq} | pq | kl \dots \rangle \\ B_{pq} = \frac{1}{2} + 2 \vec{S}_p \cdot \vec{S}_q \\ \sum_{p=1}^{A+A'} \sum_{p < q}^{A+A'} B_{pq} = \frac{(A+A')(A+A'-1)}{4} + \left\{ \sum_{p=1}^{A+A'} \vec{S}_p \right\}^2 - \sum_{p=1}^{A+A'} \vec{S}_p^2 \\ \sum_{p=1}^{A+A'} \vec{S}_p = \vec{S}_T \end{array} \right.$$

Soit (IV, 19) $B_i = \left(\frac{(A+A')(A+A'-4)}{4} + S_T(S_T+1) \right) a_i b$

Ainsi pour le Li^6 , nous avons

$$S_T = 1$$

Classes	Normalisation a_i	Cinétiques a_i	Wigner W_i	Bartlett B_i
$((F D))$	1	1	15 w	5 b
$((F 15))$	-2	-2	-30 w	-10 b
$((F 15, 26))$	1	1	15 w	5 b

On ne peut effectuer de calcul sur M et H car ces opérateurs mélangent les classes d'intégrales.

Cependant ce test combiné avec la vérification soigneuse des propriétés énoncées plus haut ($\text{IV } \S B$) permet un contrôle très efficace.

E - METHODES DE CALCUL DES INTEGRALES D'ESPACE

Historiquement, deux méthodes ont été utilisées dans le calcul des intégrales d'espace intervenant dans les énergies de liaison et les collisions des noyaux légers.

- 1°) Intégration manuelle grâce à des formules analytiques conduisant à des fonctions explicites des paramètres variationnels.
- 2°) Intégration numérique par la méthode de Monte-Carlo pour les intégrales multiples.

La première méthode a été extensivement utilisée dans les problèmes de noyaux légers ; si elle est encore applicable à l'énergie de liaison du Li^6 , elle est totalement inapplicable dans la collision $n\text{-Li}^6$ et celles du même genre.

La deuxième méthode a été utilisée par Schmid, Herndon et Tang (54). Elle a l'avantage de la souplesse d'utilisation (introduction de potentiel à coeur infiniment répulsif...). Mais elle nécessite des calculateurs très puissants par la capacité des mémoires centrales et la rapidité de calcul. Ainsi, le calcul de l'énergie du Li^6 -avec une fonction d'essai plus sophistiquée que la nôtre- a demandé à Schmid (54) 50 heures avec un ordinateur beaucoup plus puissant que le nôtre.

Nous ne disposons que d'un ordinateur à faible capacité (8 K en mémoire centrale dont 6 000 mots réellement utilisables par les programmes) au temps de base de 3,6 μs . Concrètement

la limitation de la mémoire centrale nous oblige à fractionner nos programmes et à faire d'incessants va-et-vient entre la mémoire centrale et le disque magnétique (temps d'accès $\sim 1s$).

Donc nous avons cherché à programmer les formules analytiques, pour cela nous avons utilisé une propriété bien connue des gaussiennes.

1°) principe

$$I_n^0 = \int \dots \int e^{-\sum_{i,j}^n f_{ij} x_i x_j} dx_1 \dots dx_n = \left[\frac{\pi^n}{\Delta} \right]^{1/2}; \quad f_{ij} = f_{ji}$$

avec Δ déterminant de la forme quadratique en exposant.

de même

$$(IV, 20) \quad I_n = \int \dots \int e^{-\sum_{i,j}^n f_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n = \left[\frac{\pi^n}{\Delta} \right]^{3/2}; \quad f_{ij} = f_{ji}$$

on peut remarquer, que si nous intégrons $(IV, 20)$ sur la variable $\vec{x}_n$, sachant que :

$$(IV, 21) \quad \iiint e^{-(\alpha \vec{x}^2 + \vec{p} \vec{x} + c)} d\vec{x} = \left[\frac{\pi}{\alpha} \right]^{3/2} e^{\vec{p}^2 / 4\alpha + c} \quad cf (39)$$

si l'on fait

$$\begin{aligned} \vec{x} &\equiv \vec{x}_n \\ \alpha &\equiv f_{nn} \\ \vec{p} &\equiv 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{in} \vec{x}_i \\ c &\equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j \end{aligned}$$

il vient

$$(IV, 22) I_n = \left[\frac{\pi}{f_{nn}} \right]^{3/2} \int \dots \int e^{-\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_{in} \vec{x}_i \right)^2}{f_{nn}} \right]} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n-1}$$

$$(IV, 23) I_n = \left[\frac{\pi}{f_{nn}} \right]^{3/2} \int \dots \int e^{-\left[\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(f_{ij} - \frac{f_{in} f_{jn}}{f_{nn}} \right) \vec{x}_i \vec{x}_j \right]} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n-1}$$

c'est-à-dire on remplace

$$f_{ij} \longrightarrow f_{ij} - \frac{f_{in} f_{jn}}{f_{nn}}$$

ce qui est exactement la méthode classique des pivots pour calculer les déterminants.

C'est un peu plus compliqué lorsqu'il existe des expressions polynomiales en facteur de l'exponentielle.

Cependant, ce travail se programme assez facilement et l'intégration est effectuée très rapidement par un ordinateur, les seules données à entrer sont alors les coefficients de la forme quadratique.

2°) Application aux intégrales d'énergie potentielle d'échange

Les intégrales d'énergie potentielle d'échange ont la forme :

$$(IV, 24) I_0 = ((1|j|0)) = N \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^{A+3} g_{ij} \vec{R}_i \vec{R}_j} [f(\vec{R}_4)]^2 d\vec{R}_1 \dots d\vec{R}_{A+3}$$

pour les intégrales directes,

et :

$$(IV, 25) I_1 = ((1j|kl, \dots)) = N \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^{A+3} g_{ij} \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j} f(\vec{R}_4) [f(\vec{R}_4 \dots \vec{R}_4)] d\vec{R}_1 \dots d\vec{R}_{A+3}$$

pour les intégrales avec échange.

Dans ces dernières, on effectue le changement de variables

$$P_{kl, \dots} \vec{R}_4 = \vec{v} ; \quad \vec{R}_1 \longrightarrow \vec{v}$$

afin de simplifier l'expression polynomiale en facteur de l'exponentielle.

Dans les deux cas, on applique la méthode du 1°) sauf pour la variable $\vec{R}_4$ dans I_0 , et sauf pour $\vec{R}_4$ et $\vec{v}$ dans I_1 .

On est conduit alors à intégrer

$$(IV, 26) \begin{cases} I'_0 = \int \dots \int e^{-\lambda_1 \vec{R}_4^2} [f(\vec{R}_4)]^2 d\vec{R}_4 \\ I'_1 = \int \dots \int e^{-\lambda_1 \vec{R}_4^2 - \lambda_2 \vec{R}_4 \cdot \vec{v} - \lambda_3 \vec{v}^2} f(\vec{R}_4) f(\vec{v}) d\vec{R}_4 d\vec{v} \end{cases}$$

Ce qui peut se faire soit en appliquant les formules analytiques de l'appendice, soit par les méthodes classiques de l'analyse numérique - le domaine d'intégration n'est pas très étendu en raison de la décroissance très rapide des gaussiennes.

3°) Application aux intégrales d'énergie cinétique

La difficulté est double : d'abord appliquer l'opérateur d'énergie cinétique à la fonction d'onde et ensuite effectuer l'intégration.

On connaît O_{KE} l'opérateur d'énergie cinétique

$$(IV, 27) \quad O_{KE} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{5-p}{4-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 + \sum_{p=5}^{A'+3} \frac{5+A'-p}{4+A'-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 + \frac{A+A'}{A A'} \nabla_{\vec{R}_4}^2 \right\}$$

Le calcul à effectuer s'écrit :

$$(IV, 28) \quad \langle | O_{KE} | kl, \dots \rangle = \langle | kl \dots O_{KE} | kl \dots \rangle = \langle \dots kl | O_{KE} | \rangle$$

en raison de l'hermiticité de O_{KE} et de son invariance par une renumérotation des nucléons.

En appliquant les formules de dérivation de l'appendice numérique :

Pour le 1er amas, 3 termes de la forme :

$$(IV, 29) \quad \frac{5-p}{4-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 \psi = \frac{5-p}{4-p} \left\{ -3\lambda \frac{4(4-p)}{5-p} + \lambda^2 \frac{16(4-p)}{(5-p)^2} \vec{R}_p^2 \right\} \psi$$

Pour le 2ème amas ($A'-1$) termes de la forme :

$$(IV, 30) \quad \frac{5+A'-p}{4+A'-p} \nabla_{\vec{R}_p}^2 \psi = \frac{5+A'-p}{4+A'-p} \left\{ -3\lambda'' \frac{A'(4+A'-p)}{5+A'-p} + \lambda''^2 \frac{A'^2(4+A'-p)^2}{(5+A'-p)^2} \vec{R}_p^2 \right\} \psi$$

Soit

$$(IV, 31) \quad O_{KE} |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -36\lambda - 3A'(A'-1)\lambda'' + \lambda^2 \sum_{p=1}^3 \frac{16(4-p)}{5-p} \vec{R}_p^2 + \lambda''^2 \sum_{p=5}^{A'+3} \frac{A'^2(4+A'-p)^2}{5+A'-p} \vec{R}_p^2 + \frac{4+A'}{4A'} \nabla_{\vec{R}_4}^2 \right\} |\psi\rangle$$

On remarque

$$(IV, 32) \quad O_{KE} |\psi\rangle = +\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 36\lambda + 3A'(A'-1)\lambda'' + 8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda'' \frac{\partial}{\partial \lambda''} - \frac{4+A'}{4A'} \nabla_{\vec{R}_4}^2 \right\} |\psi\rangle$$

De même

$$(IV,33) P_{kl,\dots} O_{KE} |kl\dots\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 36\lambda + 3\lambda''(A'-1)A' + 8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} - \frac{4+A'}{4A'} \nabla_{(PR_u)}^2 \right\} |kl\dots\rangle$$

On regroupe à part les termes comportant des dérivations par rapport aux paramètres :

$$(IV,34) O'_{KE} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right]$$

$$(IV,35) \langle O'_{KE} | kl\dots \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \int \dots \int \left[P_{kl\dots} \varphi \right] \left\{ 8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right\} \varphi + \varphi \left\{ 8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right\} (P_{kl\dots}) \varphi d\tau$$

$$(IV,36) \langle O'_{KE} | kl\dots \rangle = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 8\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right\} \langle |kl\dots \rangle$$

Soit au bilan

$$(IV,37) \langle \varphi | O_{KE} | A\varphi \rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 36\lambda + 3A'(A'-1)\lambda'' + 4\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} + A'\lambda''^2 \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right\} \langle \varphi | A\varphi \rangle - \frac{\hbar^2}{2m} \langle \varphi | \frac{4+A'}{4A'} \nabla_{(PR_u)}^2 A\varphi \rangle$$

La dérivation des intégrales de normalisation par rapport aux paramètres se fait numériquement avec une précision très bonne comme nous avons pu le tester en comparant cette méthode avec une méthode directe.

L'opérateur de dérivation sur $\vec{R}_4$ donne un polynôme en $\vec{R}_4$ que l'on intègre en programmant les formules analytiques de l'appendice ou par une méthode numérique.

4°) Application au calcul du rayon carré moyen

Nous avons vu que

$$(IV, 38) \quad R_{RMS} = \left\{ \frac{1}{4+A'} \langle \psi | O_{RMS} | \psi \rangle \right\}^{1/2}$$

avec

$$(IV, 39) \quad O_{RMS} = \frac{4A'}{A'+4} \vec{R}_4^2 + \sum_{p=1}^3 \frac{4-p}{5-p} \vec{R}_p^2 + \sum_{p=5}^{A'+3} \frac{4+A'-p}{5+A'-p} \vec{R}_p^2$$

On voit

$$(IV, 40) \quad O_{RMS} |D\rangle = - \left\{ \frac{8A'}{A'+4} \frac{\partial}{\partial \lambda'} + \frac{2}{A} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{2}{A'} \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right\} |D\rangle$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour l'énergie cinétique

$$(IV, 41) \quad R_{RMS} = \left\{ \frac{-1}{4+A'} \left(\frac{4A'}{4+A'} \frac{\partial}{\partial \lambda'} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{A'} \frac{\partial}{\partial \lambda''} \right) \langle \psi | \psi \rangle \right\}^{1/2}$$

5°) Calcul des intégrales coulombiennes

Comme nous l'avons discuté plus haut (III §D), on se contente - au prix d'une légère surestimation - de la composante directe. Cependant la méthode que nous allons utiliser est valable même pour les intégrales coulombienne avec échange. Cette méthode a été utilisée par Biel et Edwards. Elle permet de lier le calcul des coulombiennes $E_c = \langle ij | kl, \dots \rangle_c$ à l'intégrale d'énergie potentielle correspondante $E(r) = \langle ij | kl, \dots \rangle$. r signifie qu'elle dépend de la portée des potentiels nucléaires

Calculons
$$\int_0^\infty \frac{E(r)}{r^p} dr = -V_0 \int_0^\infty \dots \int \Phi e^{-r_{ij}^2} p_{kl} \dots \Phi \frac{dr}{r^p} d\tau$$

$$\int_0^\infty \frac{E(r) dr}{\sqrt{r}} = -V_0 \int_0^\infty \dots \int \Phi \frac{\sqrt{\pi}}{r_{ij}} \rho_{kl} \dots \Phi dr$$

$$(IV, 42) \quad = -\sqrt{\pi} \frac{V_0}{e^2} \langle ij | kl \dots \rangle_c$$

Donc si $E(r) = \langle ij | kl \dots \rangle$ est intégrale d'échange pour la paire de nucléons (i,j), l'énergie coulombienne de la même paire (si ce sont deux protons) s'écrit :

$$(IV, 43) \quad \langle ij | kl, \dots \rangle_c = -\frac{e^2}{V_0} \int \frac{E(r)}{(\pi r)^{1/2}} dr$$

6°) Conclusions sur les méthodes de calcul

Avec les contraintes que nous imposaient la taille de l'ordinateur, nous avons cherché à séparer le calcul des énergies ou caractéristiques internes de chaque amas du calcul des énergies de caractéristiques de liaison inter-amas. Ce qui concrètement se traduit par une séparation de l'intégration sur les variables internes des amas et de l'intégration sur $\vec{R}_h$ dont dépend la liaison inter-amas. Le premier problème est indépendant du type de liaison tant que les amas n'ont pas d'excitation interne.

En terme de programmation, cela se traduit par un programme (plutôt ensembles de programmes) identique pour tous les problèmes que nous étudions, et un ensemble de petits sous-programmes qui effectuent les calculs chacun pour un type de liaison inter-amas particulier.

Nous avons mis au point un programme donc, où les seules données sont le nombre de nucléons, les caractéristiques du potentiel nucléaire, le type de liaison inter amas et évidemment la valeur des paramètres. Les intégrales du problèmes sont calculées en un temps relativement court et stockées sur un fichier.

Un autre programme relit les fichiers et effectue les différentes combinaisons de ces intégrales pour calculer l'énergie de liaison.

Enfin nous remarquons l'extrême importance des intégrales de potentielle d'échange (les intégrales de normalisation ne sont qu'un cas particulier avec $\gamma = 0$) à partir desquelles nous déduisons toutes les autres.

F - RESULTATS POUR LE Li^6

1) Après intégration sur toutes les variables de spin, nous obtenons l'expression de l'énergie de liaison de Li^6 , $E(\lambda, \lambda', \lambda'')$. (38)

Les différentes composantes de cette énergie s'écrivent AN , E_{cin} , E_{pot}^0 , E_{pot}^1 , E_{pot}^2 . Ce sont respectivement la normalisation, l'énergie cinétique, et les énergies potentielles directes, de simple, échange et de double échange. E_{cb} sera l'énergie coulombienne.

$$(\text{IV}, 44) \quad AN = ((10)) - 2((15)) + ((15, 26))$$

$$E_{\text{cin}} = ((1KE|0)) - 2((1KE|15)) + ((1KE|15, 26))$$

$$E_{\text{pot}}^0 = (w+m+b+h)((156|0)) + (8w+4b-2m-4h)((15|0)) \\ + 6(w+m)((12|0))$$

$$E_{\text{pot}}^1 = -4(w+m+b+h)((16|15)) - 12(w+m)((12|15)) \\ - 6(w+m)((134|15)) - (2w+4b-8m-4h)((15|15)) \\ - (6w+2b-4m-6h)((26|15))$$

$$E_{\text{pot}}^2 = 2(w+m+b+h)((12|15, 26)) + (w+m+b+h)((134|15, 26))$$

$$E_{\text{cb}} = ((12_c|0)) + 2((15_c|0))$$

L'énergie totale s'écrit :

$$(\text{IV}, 45) \quad E(\lambda, \lambda', \lambda'') = \frac{1}{AN} \{ E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}^0 + E_{\text{pot}}^1 + E_{\text{pot}}^2 \} + \frac{1}{((10))} E_{\text{cb}}$$

2) Cette expression est soumise au principe variationnel. Etant donné l'importance des calculs, il n'est pas possible d'effectuer une recherche de minimum par les méthodes classiques de l'analyse numérique.

L'analyse des 3 paramètres se fait séparément et permet une interprétation de leur influence respective.

Par construction de la fonction d'onde :

- λ est le paramètre qui caractérise principalement le groupement He_4
- λ'' caractérise le groupement deutéron
- λ' permet de faire varier la distance moyenne entre les groupements He_4 et deutéron ainsi que leur mutuelle interpénétration.

Etant donné l'énergie de liaison élevée de la particule et sa relative incompressibilité, nous admettrons que sa déformation est négligeable lorsque on l'inclut dans le Li^6 .

On peut donc utiliser pour λ la valeur déduite de l'étude de l' He_4 libre. Comme nous l'avons noté plus haut, en raison du caractère non saturant des forces nucléaires utilisées, nous fixons λ de manière à assurer un rayon carré moyen à la particule α .

Nous utilisons principalement :

$$\lambda = 0,14 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2} \quad \bar{r}_\alpha = \sqrt{\frac{9}{32\lambda}} \approx 1,42 \text{ fermi}$$

Ensuite pour des λ'' différents, nous traçons l'évolution de l'énergie en fonction de λ' . Nous donnons ici les résultats calculés avec 2 potentiels nucléon-nucléon:

$$\begin{aligned} \text{POT}_1 &\rightarrow \begin{cases} V_0 = -46,8 \text{ MeV} \\ \gamma = 0,269 \text{ fermi}^{-2} \end{cases} \\ \text{POT}_2 &\rightarrow \begin{cases} V_0 = -45,0 \text{ MeV} \\ \gamma = 0,266 \text{ fermi}^{-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, avec le type de forces de Serber
 Nous avons utilisé les 3 types de liaison précisés dans
 le chapitre III :

$$\begin{aligned} f_1(\vec{R}_4) &= e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^2} \\ f_2(\vec{R}_4) &= \vec{R}_4^2 e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^2} \\ f_3(\vec{R}_4) &= \left(1 - \frac{2\lambda'}{3} \vec{R}_4^2\right) e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^2} \end{aligned}$$

Quand on assigne à $\lambda, \lambda', \lambda''$ les valeurs tirées du modèle en couches, f_2 est strictement équivalent à f_3 et f_1 s'annule identiquement sous l'influence de l'antisymétrisation.

Comme notre étude variationnelle dans le cadre nous éloigne des valeurs du modèle en couches, $f_1(\vec{R}_4)$ ne s'annule plus identiquement, f_2 devient différente de f_3 ; d'autre part, les résultats pour les 3 types de liaison ne sont pas essentiellement différents.

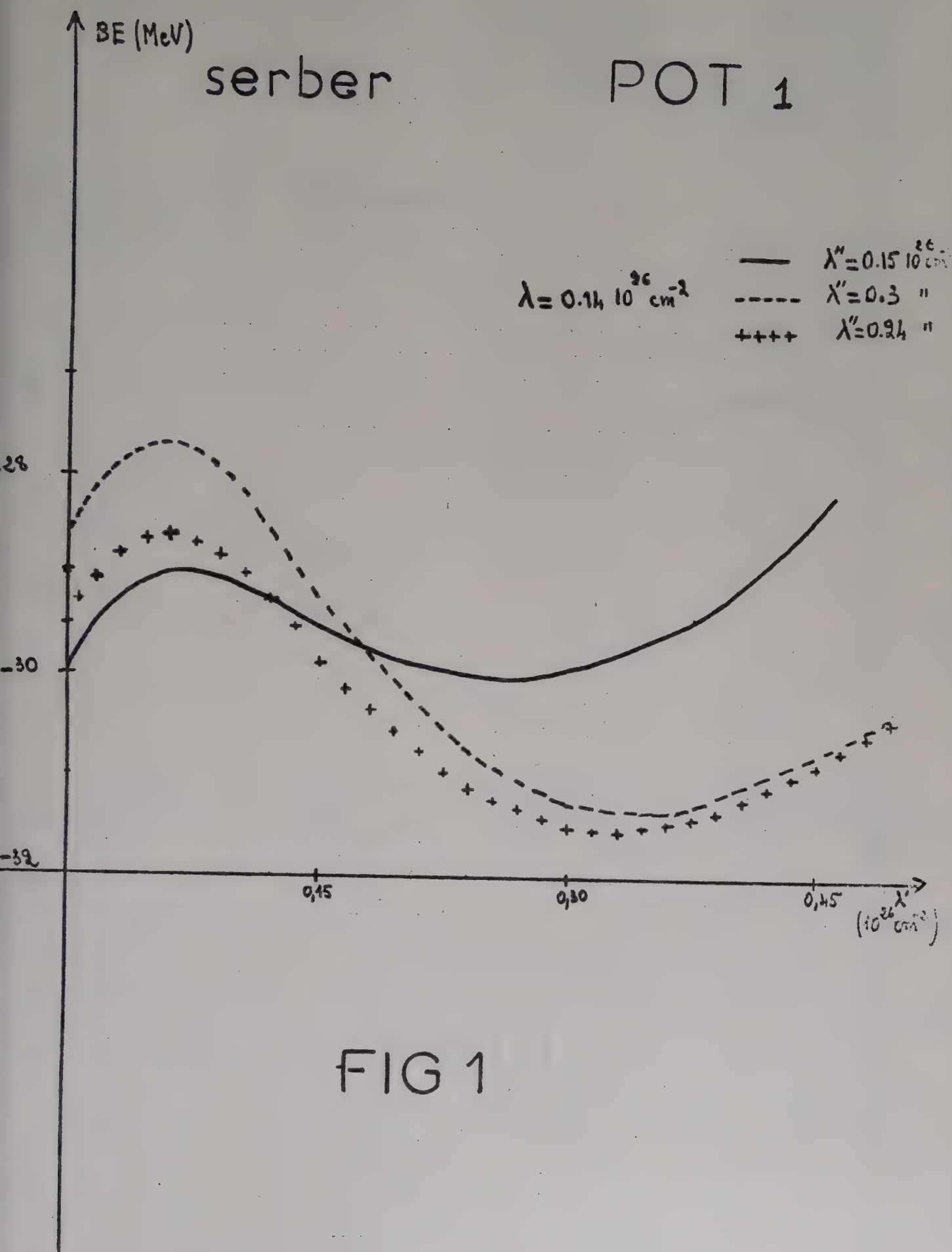
Nous présentons dans les pages suivantes les résultats obtenus avec la fonction $f_2(\vec{R}_4) = \vec{R}_4^2 e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^2}$

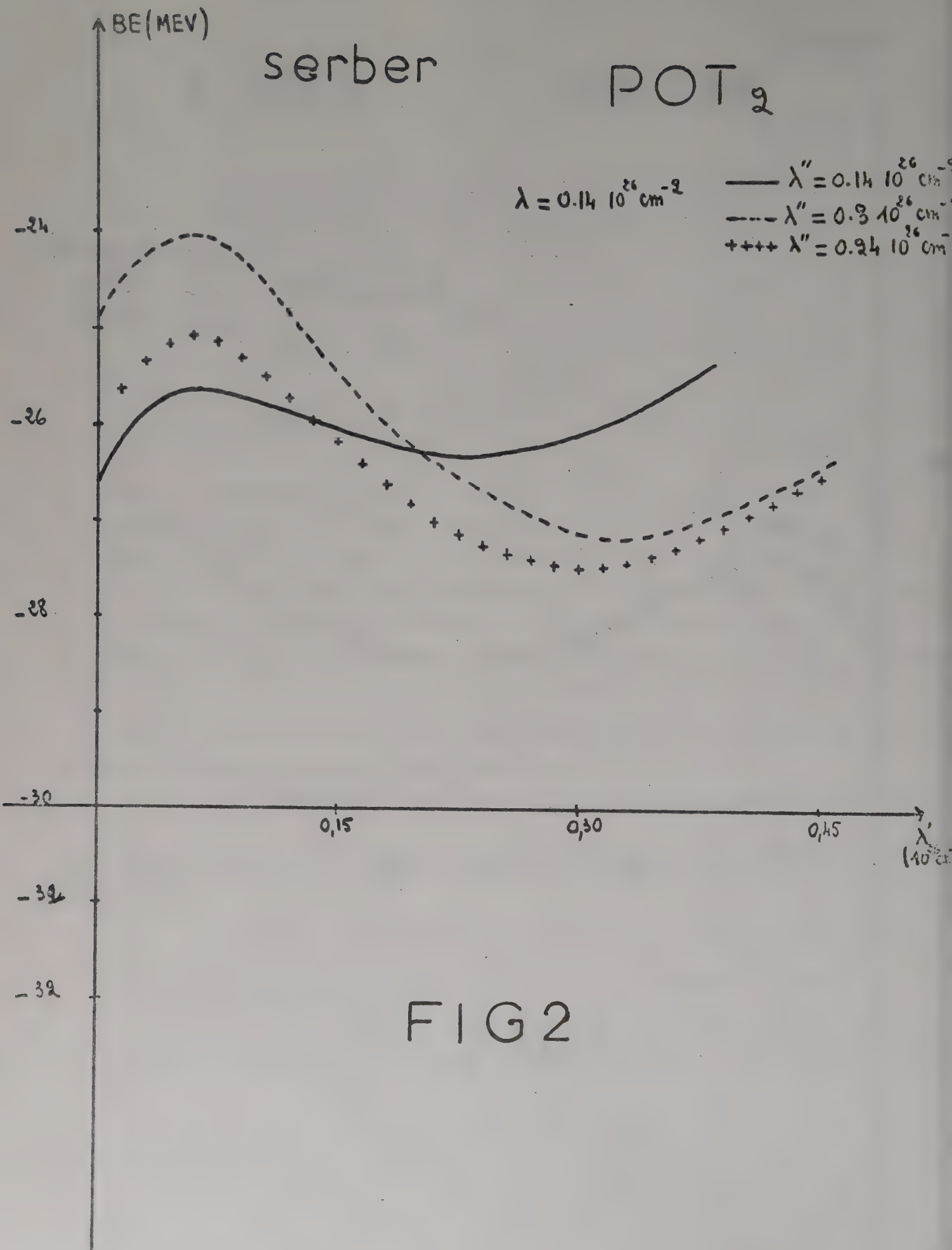
La Figure I présente les courbes obtenues avec le potentiel I.

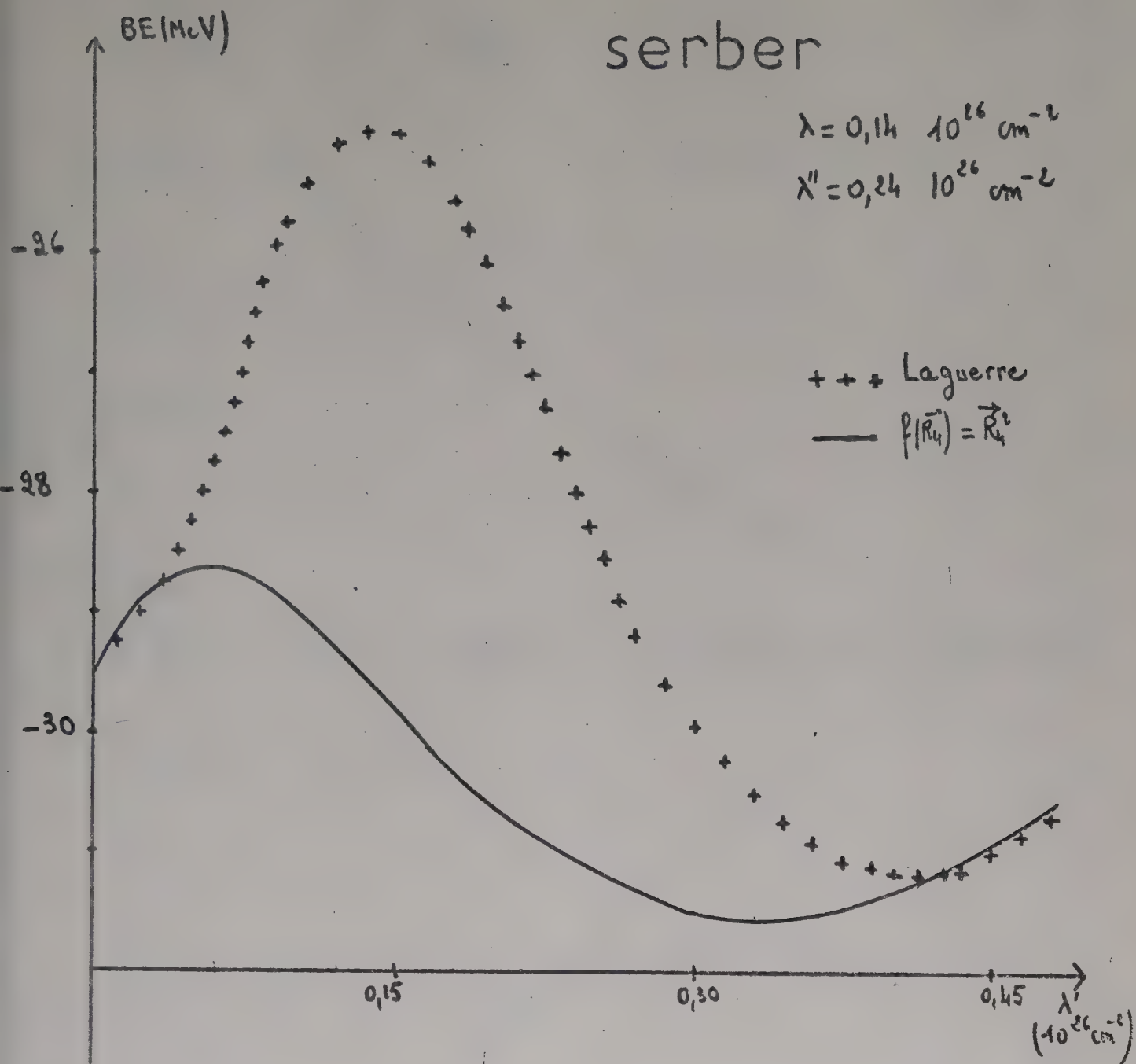
La Figure II présente les courbes obtenues avec le potentiel II.

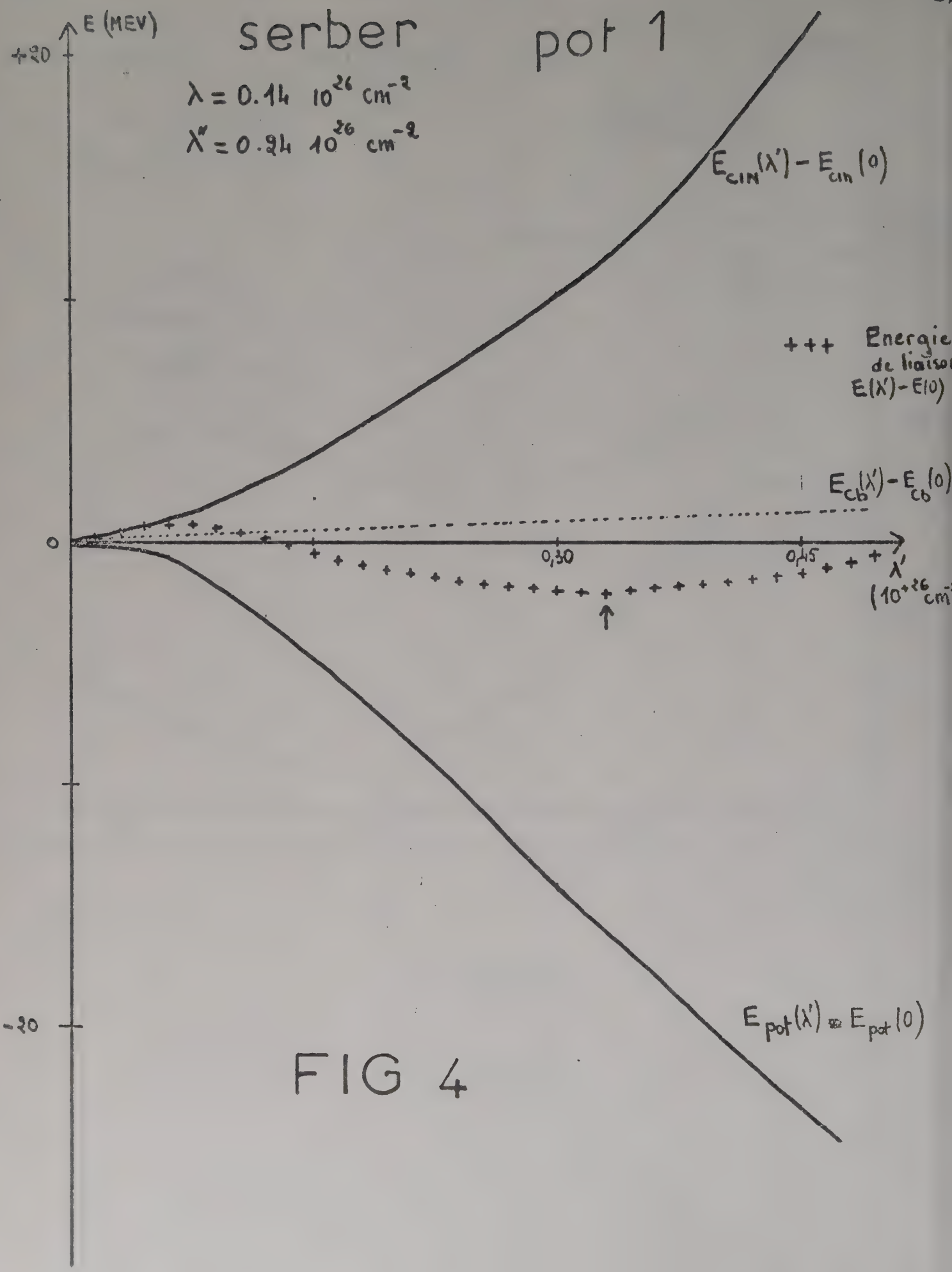
La Figure III compare l'évolution de l'énergie de liaison avec λ' , quand on utilise la fonction f_2 et la fonction de Laguerre pour la liaison α -deuteron.

La Figure IV montre les variations des différentes composantes de l'énergie de liaison en fonction de λ' .









Dans le tableau ci-dessous, nous donnons les résultats variationnels à comparer avec les valeurs expérimentales obtenus avec la fonction $f_2(\vec{R}_4)$.

Potentiel 1

$$\lambda = 0,14 \text{ fermi}^{-2}$$

$$E_{\min} = -31,54 \text{ Mev}$$

$$\lambda' = 0,33 \text{ fermi}^{-2}$$

$$\bar{r}_{\text{uc}} = 2,1 \text{ fermi}$$

$$\lambda'' = 0,24 \text{ fermi}^{-2}$$

Potentiel 2

$$\lambda = 0,14 \text{ fermi}^{-2}$$

$$E_{\min} = -27,50 \text{ Mev}$$

$$\lambda' = 0,30 \text{ fermi}^{-2}$$

$$\bar{r}_{\text{uc}} = 2,15 \text{ fermi}$$

$$\lambda'' = 0,24 \text{ fermi}^{-2}$$

Potentiel 1 (modèle en couches)

$$\lambda = 0,14 \text{ fermi}^{-2}$$

$$E_{\min} = -24,7 \text{ Mev}$$

$$\lambda' = 0,07467 \text{ fermi}^{-2}$$

$$\bar{r}_{\text{uc}} = 1,68 \text{ fermi}$$

$$\lambda'' = 0,28 \text{ fermi}^{-2}$$

Expérimentalement (2)

$$E_{\text{uc}} = -32,0 \text{ Mev}$$

$$\bar{r} = 2,54 \pm 0,05 \text{ fermi. (57)}$$

Bernheim, cité par Suelze donne $2,41 \pm 0,06 \text{ Fermi (57)}$

3) Conclusions

-L'étude précédente permet de conclure que, dans le cadre du modèle en groupes de résonance, nous obtenons une énergie correcte pour le Li^6 en prenant comme configuration de base une particule α et un deutéron.

Cette énergie de liaison est calculée à partir d'un potentiel nucléon-nucléon phénoménologique ayant fait ses preuves dans l'étude des noyaux plus légers (38). Ceci est conforme aux calculs sur le Li^6 qui ont été déjà effectués avec ce modèle (50).

- Les paramètres variationnels diffèrent notablement de ceux que donne le modèle en couches; l'étude avec le modèle en groupes de résonance donne des résultats qui nécessiteraient, par ailleurs, un mélange de configurations important.

- Cependant, le rayon carré moyen du Li^6 obtenu est inférieur à celui déduit des collisions $e^- - \text{Li}^6$ à hautes énergies. La fonction d'onde utilisée, en privilégiant le centre de masse du deutéron, implique que les deux nucléons dans l'état ($1p$) soient fortement corrélés. Avant de conclure que la fonction d'onde est défectueuse, il faut noter que les potentiels utilisés ne satisfont pas à la saturation des forces nucléaires. On a vu plus haut une conséquence importante: on ne peut appliquer directement à la particule α la méthode variationnelle.

Aussi la démarche qui consiste à minimiser l'énergie du Li^6 par rapport aux paramètres λ' et λ'' est approximative.

L'approximation n'est pas importante pour λ' puisque les groupements α et d sont relativement bien séparés.

Mais cette procédure appliquée au paramètre λ'' a pour conséquence la densification du deutéron, donc la surestimation de λ'' . Ainsi, si nous affectons à λ'' des valeurs plus faibles, la valeur du rayon carré moyen est nettement améliorée, l'énergie gardant une valeur très acceptable.

Par exemple le calcul effectué avec $\lambda'' = 0,15 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ donne :

$$\begin{array}{lll} \bar{r} = 2,32 \text{ fermi} & E = -30,0 \text{ MeV} & \text{avec le potentiel I} \\ \bar{r} = 2,40 \text{ fermi} & E = -26,3 \text{ MeV} & \text{avec le potentiel II} \end{array}$$

- Enfin , l'antisymétrisation réduit de façon très notable les écarts entre les différentes fonctions que l'on peut choisir comme liaison entre la particule α et le deutéron .

La majeure partie des difficultés que l'on rencontre dans les états liés du Li^6 - à structure prédominante α -d - provient de la faiblesse de l'énergie de liaison du deutéron . De l'étude du deutéron libre , on ne peut tirer beaucoup de renseignements sur les amas à 2 nucléons dans les noyaux plus lourds.

Faut-il remettre en cause la corrélation des 2 nucléons (1p) dans le Li^6 ? Wackman et Austern (72) ont testé pour le Li^6 un modèle à 3 corps α -n-p ; le rayon carré moyen trouvé est le même (2,1 fermi). Il ne semble donc pas que le fait de dissocier le deutéron donne de meilleurs résultats . Cependant , ces auteurs ont utilisé des potentiels effectifs n- α pour l'interaction des nucléons (1p) avec la particule α centrale et ont négligé les intégrales de double échange qui dans nos calculs ont le même ordre de grandeur que celles de simple échange . Il serait intéressant de calculer les caractéristiques du Li^6 avec les nucléons (1p) indépendants dans le cadre du modèle en groupes de résonance .

CHAPITRE V

L'EQUATION DE LA COLLISION $n\text{-Li}^6$

- A - Introduction
- B - La fonction d'onde du système
- C - Le principe variationnel - L'équation de la collision
- D - Le développement sphérique de l'équation
- E - Les noyaux d'échange
- F - Les noyaux cinétiques
- G - Listing des termes de l'équation

A - INTRODUCTION

Dans l'étude qui précède nous avons établie une fonction d'onde des noyaux $(1s)^4 (1p)^{A'}$ avec $A' \leq 4$. Nous l'avons testée par le calcul de l'énergie de liaison et la taille des noyaux, en particulier dans le cas du Li^6 .

Cependant cette étude n'avait pas l'ambition d'analyser les états - excités ou non - de ces noyaux d'une manière très approfondie, mais de donner une base à l'étude de la collision $n-Li^6$ et des autres du même type.

Dans les chapitres qui suivent, nous allons formuler l'équation de la collision élastique $n-Li^6$ dans le cadre de la structure en groupes résonnants et calculer les sections efficaces afin de les confronter avec les résultats expérimentaux.

B - LA FONCTION D'ONDE DE n-Li⁶

La méthode pour l'établissement de la fonction d'onde de la collision est analogue à celle discutée au chapitre III, à savoir :

$$(I,1) \quad \Phi_{\sigma} (1234,56;7) = \mathcal{A} \left\{ \varphi (1234,56) F_{\sigma}(\vec{r}) \sigma_T \right\}$$

1°) $\vec{r}$ exprime la position du neutron incident par rapport au centre de gravité du noyau cible

$$(I,2) \quad \vec{r} = \vec{r}_7 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6}{6}$$

$F_{\sigma}(\vec{r})$ est la fonction de diffusion pour le canal donné de spin σ

Comme nous n'étudions plus un état lié, $F_{\sigma}(\vec{r})$ nous est totalement inconnue. C'est la fonction de diffusion de la théorie des collisions, dont la connaissance nous permettra de calculer les déphasages et les sections efficaces (39)

2°) $\mathcal{A}$ est un opérateur de permutation antisymétrisant la fonction d'onde totale et exprimant les échanges entre le nucléon incident et les neutrons de la cible. Déjà nous pouvons voir que trois amas de nucléons sont en présence, 2 liés (α -d) en interaction avec le 3ème constitué par le neutron incident.

$\mathcal{A}$ est constitué de l'antisymétriseur interne du Li⁶

$$(I,3) \quad \mathcal{A}_{Li^6} = (1 - P_{15} - P_{35}) (1 - P_{24} - P_{46})$$

et de $\mathcal{A}_{n,Li^6}$ qui antisymétrise la fonction d'onde par rapport au neutron incident

$$(I,4) \quad \mathcal{A}_{n,Li^6} = (1 - P_{17} - P_{37} - P_{57})$$

3°) σ_T est la fonction de spin de l'ensemble $n\text{-Li}^6$; comme le spin du Li^6 est +1, nous aurons deux canaux pour la réaction. Cependant comme nous sommes dans le couplage L-S, le spin est un bon nombre quantique et nous pouvons traiter les deux canaux de manière totalement indépendante.

$$(V, 5) \quad \begin{cases} \sigma_{3/2} = \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2}{\sqrt{2}} & \alpha_5 \alpha_6 \alpha_7 \\ \sigma_{1/2} = \frac{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2}{\sqrt{2}} & \frac{2\alpha_5 \alpha_6 \beta_7 - \alpha_7 (\alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5)}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Nous avons pris la notation habituelle

$$(V, 6) \quad Y_{1/2}^{1/2}(\text{Li}) = \alpha_i, \quad Y_{1/2}^{-1/2}(\text{Li}) = \beta_i$$

et comme nous étudions des faisceaux non polarisés la composante du spin sur Oz est quelconque.

$\varphi(1234, 56)$ est la fonction d'espace du Li^6 dont les paramètres ont la valeur déterminée par le calcul de l'énergie de liaison.

C - LE PRINCIPE VARIATIONNEL - L'EQUATION DE LA COLLISION

Le principe variationnel de Ritz, appliqué à la fonction Φ , indique que cette fonction sera le plus proche possible de fonction d'onde vraie du système, si elle rend stationnaire l'expression

$$(V,7) \quad E = \frac{\int \Phi^+ H \Phi d\tau}{\int \Phi^+ \Phi d\tau}$$

On sait que ceci est équivalent à

$$(V,8) \quad \int \delta \Phi^+ |H-E| \Phi d\tau = 0$$

Mais, à l'encontre du calcul des énergies de liaison, la variation ne porte plus sur un ensemble de paramètres bien déterminés, mais sur la fonction $\Phi(\vec{r})$ tout entière qui peut être considérée comme un ensemble infini de paramètres.

Soit en tenant compte des propriétés de l'antisymétriseur explicité au §III.C, et avec les notations du §.B précédent pour le canal σ_T

$$(V,9) \quad \int \left\{ \psi(1234,56) \sigma_T | H-E | A[\psi(1234,56) F_T(\vec{r}) \sigma_T] \right\} d\tau' = 0$$

où $d\tau'$ exprime l'intégration sur toutes les variables internes des amas et sur $\vec{R}_4$

H est l'hamiltonien du système de 7 nucléons :

$$(V,10) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^7 \nabla_i^2 + \sum_{1 \leq i < j}^7 V_{ij} + \sum_{\text{paires de protons}} \frac{e^2}{r_{ij}}$$

E est l'énergie du système

$$(V,11) \quad E = E_{\text{Li}^6} + E_n \quad ; E_n > 0 \quad , \quad E_{\text{Li}^6} < 0$$

E se décompose en deux parties ; E_{Li6} est l'énergie de liaison fixée au chapitre précédent

E_n est l'énergie du neutron incident dans le centre de masse.

Si nous introduisons les 2 opérateurs

$$(\text{V}, 12) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{Li6} = (1 - P_{15} - P_{35}) (1 - P_{26} - P_{46}) \\ \mathcal{A}_1 = (-P_{17} - P_{37} - P_{57}) \mathcal{A}_0 \end{cases}$$

alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$

ce qui revient à séparer les opérateurs qui laissent invariant le vecteur $\vec{r}$ ou le modifie

$$(\text{V}, 13) \quad \mathcal{A}_0 \vec{r} = \vec{r} \quad \mathcal{A}_1 \vec{r} = \vec{r}'$$

Le premier conduit à des fonctions classiques, le second à des noyaux intégraux dans l'équation différentielle :

Il vient :

$$(\text{V}, 14) \quad \int \left\{ \varphi_T \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^6 \nabla_{\vec{r}_i}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}_7}^2 + \sum_{1 \leq i < j}^6 V_{ij} + \sum_{j=1}^6 V_{j7} + \sum_{\text{paires}} \frac{e^2}{r_{ij}} - E_{Li6} - E_n \right| (\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1) \varphi F_T(\vec{r}) \varphi_T \right\} d\vec{r}'$$

On remarque que

$$(\text{V}, 15) \quad \int \left\{ \varphi_T \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^6 \nabla_{\vec{r}_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j}^6 V_{ij} + \sum_{\text{paires}} \frac{e^2}{r_{ij}} - E_{Li6} \right| \mathcal{A}_0 \varphi F_T(\vec{r}) \varphi_T \right\} d\vec{r}' = 0$$

puisque c'est l'équation que nous avons effectivement résolue plus haut •

Soit :

$$(\text{V}, 16) \quad \begin{aligned} & \int \left\{ \varphi_T \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}_7}^2 + \sum_{j=1}^6 V_{j7} - E_n \right| \mathcal{A}_0 \varphi F_T(\vec{r}) \varphi_T \right\} d\vec{r}' \\ &= - \int \left\{ \varphi_T \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^6 \nabla_{\vec{r}_i}^2 + \sum_{1 \leq i < j}^6 V_{ij} + \sum_{\substack{\text{paires} \\ \text{de} \\ \text{protons}}} \frac{e^2}{r_{ij}} - E \right| \mathcal{A}_1 \varphi F_T(\vec{r}) \varphi_T \right\} d\vec{r}' \end{aligned}$$

Si on introduit les notations :

$$(V, 17) \quad AN = \int \varphi \sigma_T A_0 \varphi \sigma_T d\vec{r}'$$

AN est le coefficient de normalisation calculé au chapitre IV

D'autre part $\mu = \frac{6}{7} m$ est la masse réduite du neutron incident dans le système du centre de masse

On pose

$$(V, 18) \quad k^2 = \frac{12m}{7\hbar^2} E_n = \frac{e^2}{\hbar^2} E_n$$

L'équation de la collision s'écrit :

$$(V, 19) \quad \left\{ \Delta_{\vec{r}} + k^2 \right\} F_T(\vec{r}) = \frac{12m}{7\hbar^2 AN} \left\{ \int \varphi \sigma_T \left| \sum_{j=1}^6 U_j \right| A_0 \varphi F_T(\vec{r}') \sigma_T d\vec{r}' \right. \\ \left. + \int \varphi \sigma_T \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^7 \nabla_{\vec{r}_i}^2 + \sum_{i < j}^7 U_{ij} + \sum_{\text{paires}} \frac{e^2}{R_{ij}} - E \right| A_0 \varphi F_T(\vec{r}') \sigma_T d\vec{r}' \right\}$$

Comme il n'y a pas d'interaction coulombienne entre le nucléon et la cible, afin d'éviter le calcul inutile d'intégrales coulombiennes, on pose

$$(V, 20) \quad \sum_{\text{paires de protons}} \frac{e^2}{R_{ij}} - E = -E^*$$

avec

$E^* = E_{L^6}^* + E_n$ — $E_{L^6}^*$ est l'énergie de liaison calculée du Li^6 dont on a enlevé la partie coulombienne

Les expressions intégrales du second membre de (V, 19) se subdivisent en deux pour donner la forme générale :

$$(V, 21) \quad \left\{ \Delta_{\vec{r}} + k^2 \right\} F_s(\vec{r}) = \frac{12m}{7\hbar^2 AN} \left\{ U_s(\vec{r}) F_s(\vec{r}) + \int [K_s^1(\vec{r}, \vec{r}') - E^* K_s^2(\vec{r}, \vec{r}')] F_s(\vec{r}') d\vec{r}' \right\}$$

En effet, lorsque les opérateurs de permutations contenus dans les expressions intégrales de (V, 19) laissent invariant le vecteur $\vec{r}$, il est possible d'effectuer totalement l'intégration sur les variables internes des amas. Cela donne des expressions fonction de $\vec{r}$ seul que l'on regroupe sous le nom de $U_s(\vec{r})$, puisque cela tient lieu de potentiel local classique.

Lorsqu'au contraire, les opérateurs effectuent la transformation

$$\begin{aligned} \vec{r} &\rightarrow \vec{r}' \\ (V, 22) \end{aligned} \quad \vec{r}' = \begin{cases} \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6 + \vec{r}_7}{6} \\ \vec{r}_8 - \frac{\delta u}{6} \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6 + \vec{r}_7}{6} \end{cases}$$

Comme $F_{\frac{1}{2}}(\vec{r})$ n'est pas connue, il reste une combinaison linéaire de noyaux intégraux qui constitue un potentiel non local ;

- $K_s^A(\vec{r}, \vec{r}')$ est un noyau symétrique indépendant de k obtenu par la sommation des interactions d'échange et de l'énergie cinétique

- $K_s^J(\vec{r}, \vec{r}')$ est un noyau symétrique obtenu par les intégrales dite de normalisation ; il dépend de k à travers le facteur multiplicatif $E^{\frac{1}{2}}$

Le fait que $U_s(\vec{r})$ soit réel, et que les noyaux soient symétriques garantit que ces opérateurs sont bien hermitiques.

D'autre part, l'hamiltonien du système ne dépend que des distances entre particules - il est invariant par rotation.

$$\text{et} \quad U_s(\vec{r}) \equiv U_s(|\vec{r}|)$$

De même $K_s^J(\vec{r}, \vec{r}')$ ne peut dépendre de $\vec{r}$ et de $\vec{r}'$ que par le module de ces vecteurs et de l'angle qu'il font entre eux

$$K_s^J(\vec{r}, \vec{r}') \equiv K_s^J(|\vec{r}|, |\vec{r}'|, \mu) \quad \mu = \cos(\vec{r}, \vec{r}')$$

Ces propriétés du potentiel et des noyaux, sont utilisées dans le paragraphe suivant pour les développer sur la base des polynomes de Legendre.

D - DEVELOPPEMENT DE L'EQUATION DE DIFFUSION

On peut éliminer les variables angulaires de l'équation intégrodifférentielle ; en effectuant la transformation (35,33)

$$(V,23) \quad \begin{aligned} F_s(\vec{r}) &= \sum_l \frac{1}{r} f_{l,s}(r) P_l(\mu_r) \quad \mu_r \equiv |\vec{r}| \\ K_s^i(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi r r'} K_{l,s}^i(r, r') P_l(\mu_{rr'}) \quad \mu_{rr'} \equiv |\vec{r}, \vec{r}'| \end{aligned}$$

μ_r est le cosinus de l'angle $(\vec{r}, \text{paysseau incident})$

Comme il sera développé dans l'appendice numérique, on calcule $K_{l,s}^i(r, r')$ en effectuant :

$$(V,24) \quad K_{l,s}^i(r, r') = 2\pi r r' \int_{-1}^{+1} K_s^i(\vec{r}, \vec{r}') P_l(\mu_{rr'}) d\mu_{rr'}$$

On remarque que

$$(V,25) \quad \int K_s^i(\vec{r}, \vec{r}') F_s(\vec{r}') d\vec{r}' = \sum_l \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{r} f_{l,s}(r') K_{l,s}^i(r, r') dr' \right\} P_l(\mu_r)$$

L'équation intégrodifférentielle (V,21) se découple pour chaque valeur l du moment angulaire en

$$(V,26) \quad \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} f_{l,s}(r) = \frac{12m}{\hbar^2} \left\{ U_s(r) f_{l,s}(r) + \int_0^\infty [K_{l,s}^i(r, r') - E^* K_{l,s}^v(r, r')] f_{l,s}(r') dr' \right\}$$

Les noyaux $K_s^i(\vec{r}, \vec{r}')$ dans nos calculs apparaissent sous 4 formes possibles :

$$(V,27) \quad K_s^i(\vec{r}, \vec{r}') = g(r, r') r^n e^{-D a r' \mu_{rr'}} \quad 0 \leq m \leq 3$$

$n = 0$ pour les noyaux d'échange avec la liaison interamas :

$$f(\vec{R}_4) = e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4}$$

$n = 1$ pour les noyaux cinétiques avec la liaison interamas :

$$f(\vec{R}_4) = e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4}$$

$n = 2$ pour les noyaux d'échange avec la liaison interamas :

$$f(\vec{R}_4) = \vec{R}_4 e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4}$$

$n = 3$ pour les noyaux cinétiques avec la liaison interamas :

$$f(\vec{R}_4) = \vec{R}_4 e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4}$$

E - LES NOYAUX D'ECHANGES

Avant d'arriver à la résolution de l'équation de la collision, il faut donc intégrer sur les spins et regrouper les noyaux intégraux du même type.

Le processus est le même que dans le calcul des énergies de liaison bien que plus complexe. Cependant on doit noter que l'intégration ne porte que sur les variables d'espace internes des amas et non sur $\vec{r}$. On ne peut donc utiliser l'hermiticité des opérateurs dépendant de $\vec{r}$ pour les faire agir à sa guise, soit sur les vecteurs "bra", soit sur les vecteurs "ket"

La conséquence la plus importante est que les noyaux intégraux dits adjoints (cf §18) peuvent être différents.

Nous introduisons des notations similaires à celles utilisées plus haut

$$(V, 28) \quad \int k(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}' = \int \dots \int \varphi U_{ij} P_{kl} \dots \varphi f(\vec{r}) d\vec{r}' \dots = \int ((1/j|kl\dots)) f(\vec{r}') d\vec{r}'$$

On voit que si les noyaux sont self-adjoints à savoir :

$$(V, 29) \quad U_{ij} P_{kl} P_{mn} \dots \varphi = P_{kl} P_{mn} \dots U_{ij} \varphi$$

Ils sont symétriques en $\vec{r}$ et en $\vec{r}'$, car on passe de

$$(V, 30) \quad \int \dots \int \varphi U_{ij} (P_{kl} \dots \varphi) F(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \quad \text{à} \quad \int \dots \int (P_{kl} \dots \varphi) U_{ij} \varphi F(\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r}$$

en changeant $\vec{r}$ en $\vec{r}'$ et réciproquement.

- Si les deux noyaux adjoints ne sont pas self-adjoints, chacun d'eux n'est pas symétrique en $\vec{r}$ et $\vec{r}'$. Mais comme ils sont affectés du même coefficient leur somme est bien symétrique en $\vec{r}$ et $\vec{r}'$.

Dans le § G de ce chapitre, nous donnons un listing de tous les noyaux d'échange calculés pour le cas $f(\vec{R}_k) = e^{-\frac{A}{2} \vec{R}_k}$

De l'énumération des types de noyaux d'échange, il apparaît que les risques d'erreur dans leur regroupement et le calcul de leurs coefficients sont grands. Aussi nous utiliserons le test développé au §.D chapitre III.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse :

$$(I, 31) \quad T_m = \langle |ij| \text{ hel } \dots \rangle = \langle |ij' \text{ hel } \dots \rangle \quad \forall ij, ij'$$

- La somme des coefficients de Wigner pour une classe m et un spin total S_T s'écrit

$$(I, 32) \quad W_m^{S_T} T_m = \frac{(A+A')(A+A'-1)}{2} w a_m T_m = 21 w a_m T_m \quad \forall S_T$$

- La somme des coefficients de Bartlett s'écrit :

$$(I, 33) \quad B_m^{S_T} T_m = b a_m T_m \left[\frac{21}{4} + S_T(S_T+1) \right] \Rightarrow \begin{cases} B_m^{3/2} = 9 b a_m \\ B_m^{1/2} = 6 b a_m \end{cases}$$

Il vient le tableau de la page suivante ; la vérification des propriétés de symétrie des coefficients énoncées au §.B du chap. IV permet d'éviter aussi les erreurs.

L'intégration sur toutes variables du problème sauf $\vec{r}'$ se fait avec une méthode analogue à celle utilisée au §.E du chap. IV, méthode développée dans l'appendice numérique.

Classes	Normalisation		Cinétiques		Wigner		Bartlett	
	$S_T = \frac{1}{2}$	$S_T = \frac{3}{2}$	$S_T = \frac{1}{2}$	$S_T = \frac{3}{2}$	$S_T = \frac{1}{2}$	$S_T = \frac{3}{2}$	$S_T = \frac{1}{2}$	$S_T = \frac{3}{2}$
$\langle F D \rangle$	1	1	1	1	$21w$	$21w$	6b	9b
$\langle F 15 \rangle$	-2	-2	-2	-2	$-42w$	$-42w$	-12b	-18b
$\langle F 15,26 \rangle$	1	1	1	1	$21w$	$21w$	6b	9b
$\langle F 17 \rangle$	-1	-1	-1	-1	$-21w$	$-21w$	-6b	-9b
$\langle F 57 \rangle$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{21}{2}w$	$-21w$	+3b	-9b
$\langle F 17,15 \rangle$	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{21}{2}w$	$+21w$	-3b	+3b
$\langle F 57,16 \rangle$	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{1}{2}$	+1	$-\frac{21}{2}w$	$+21w$	-3b	+3b
$\langle F 17,26 \rangle$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{105}{2}w$	$21w$	15b	9b
$\langle F 17,15,26 \rangle$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{21}{2}w$	$-21w$	3b	-3b
$\langle F 17,35,26 \rangle$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{63}{2}w$	0	-9b	0

F - LES NOYAUX CINÉTIQUES

L'opérateur énergie cinétique, dont on a enlevé l'énergie du centre de gravité, s'écrit :

$$(V, 34) \quad O_{KE} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{3} \Delta_{R_1}^2 + \frac{3}{2} \Delta_{R_2}^2 + 2 \Delta_{R_3}^2 + 2 \Delta_{R_5}^2 + \frac{3}{4} \Delta_{R_4}^2 + \frac{7}{6} \Delta_z^2 \right\}$$

Si l'on sépare l'énergie cinétique du Li^6 de celle du neutron incident

$$(V, 35) \quad \begin{cases} O_{KE} = O_{KE}^{Li^6} + O_{KE}^n \\ O_{KE}^n = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{7}{6} \Delta_z^2 \end{cases}$$

Les intégrales à calculer sont du type :

$$(V, 36) \quad \langle O_{KE} | k l \dots \rangle = \int \dots \int \left(\psi_{Li^6}^* \nabla_T^2 | O_{KE}^{Li^6} + O_{KE}^n | \psi_{k l \dots} \right) d\vec{R}_1 \dots d\vec{R}_5$$

Comme $O_{KE}^{Li^6}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{R}_i, 1 \leq i \leq 5$; on peut utiliser le fait que c'est un opérateur hermitique et

$$(V, 37) \quad \langle O_{KE}^{Li^6} | k l \dots \rangle = \int \dots \int \left(O_{KE}^{Li^6} \psi_{k l \dots}^* \right) | \psi_{k l \dots} \rangle d\vec{R}_1 \dots d\vec{R}_5$$

En utilisant les formules de l'appendice numérique

$$(V, 38) \quad O_{KE}^{Li^6} \psi_{Li^6} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ 36\lambda - 6\lambda'' + \lambda'' \left(12 \vec{R}_1^2 + \frac{32}{3} \vec{R}_2^2 + 8 \vec{R}_3^2 \right) + 2\lambda'' \vec{R}_5^2 + \frac{3}{4} \Delta_{R_4}^2 \right\} \psi_{Li^6}$$

$\Delta_{R_4}^2$ donne une contribution différente selon le type de la liaison α -d dans le Li^6 .

Nous aurons :

$$f(\vec{R}_4) = e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^v} \quad \text{notée I}$$

$$(V, 39) \quad \frac{3}{4} \Delta_{\vec{R}_4} \psi_{\vec{R}_4}^I = \frac{3}{4} (-3\lambda' + \lambda'^v \vec{R}_4^v) \psi_{\vec{R}_4}^I$$

$$f(\vec{R}_4) = \vec{R}_4^v e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^v} \quad \text{notée II}$$

$$(V, 40) \quad \frac{3}{4} \Delta_{\vec{R}_4} \psi_{\vec{R}_4}^{II} = \frac{3}{4} \left(\frac{6}{\vec{R}_4^v} - 7\lambda' + \lambda'^v \vec{R}_4^v \right) \psi_{\vec{R}_4}^{II}$$

L'expression des opérateurs d'énergie cinétique s'écrit :

$$(V, 41) \quad O_{KE}^I = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -36\lambda - 6\lambda'' \frac{9\lambda'}{4} + \lambda'^v (12\vec{R}_1^v + \frac{32}{3}\vec{R}_2^v + 8\vec{R}_3^v) + 2\vec{R}_5^v \lambda'' + \frac{3}{4} \lambda'^v \vec{R}_4^v + \frac{7}{6} \Delta_{\vec{v}} \right\}$$

$$O_{KE}^{II} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -36\lambda - 6\lambda'' \frac{21\lambda'}{4} + \lambda'^v (12\vec{R}_1^v + \frac{32}{3}\vec{R}_2^v + 8\vec{R}_3^v) + 2\vec{R}_5^v \lambda'' + \frac{9}{2\vec{R}_4^v} + \frac{3}{4} \lambda'^v \vec{R}_4^v + \frac{7}{6} \Delta_{\vec{v}} \right\}$$

Avant de passer au calcul effectif, il est nécessaire d'effectuer le changement de variables $\vec{R}_1 \rightarrow \vec{r}'$ ou $\vec{R}_5 \rightarrow \vec{r}'$ suivant les cas :

1er cas

$$(V, 42) \quad \vec{r}' = \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_5 + \vec{r}_6 + \vec{r}_7}{6} = -\frac{\vec{r}}{6} - \frac{7\vec{R}_4}{18} + \frac{7\vec{R}_1}{8}$$

alors :

$$(V, 43) \quad \begin{cases} \vec{R}_1 = \frac{4}{21} \vec{r} + \frac{8}{7} \vec{r}' + \frac{4\vec{R}_1}{9} \\ \frac{7}{6} \Delta_{\vec{r}} \rightarrow \frac{7}{6} \left\{ \Delta_{\vec{r}} + \frac{1}{36} \Delta_{\vec{r}'} - \frac{1}{3} \nabla_{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{r}'} \right\} \end{cases}$$

2ème cas

$$\vec{r}' = \vec{r}_5 - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 + \vec{r}_6 + \vec{r}_7}{6} = -\frac{\vec{r}}{6} + \frac{7}{9} \vec{R}_4 + \frac{7\vec{R}_5}{12}$$

alors

$$(V, 44) \quad \begin{cases} \vec{R}_5 = \frac{2}{7} \vec{r} + \frac{12}{7} \vec{r}' - \frac{4}{3} \vec{R}_4 \\ \frac{7}{6} \Delta_{\vec{r}} \rightarrow \frac{7}{6} \left\{ \Delta_{\vec{r}} + \frac{1}{36} \Delta_{\vec{r}'} - \frac{1}{3} \nabla_{\vec{r}} \cdot \nabla_{\vec{r}'} \right\} \end{cases}$$

Puisque $F(\vec{r})$ n'est pas connue, on ne peut faire agir à droite les opérateurs de dérivation $\nabla_{\vec{r}'}$, $\Delta_{\vec{r}'}$. Alors

$$(V, 45) \left(\left(\left| \frac{1}{36} \Delta_{\vec{r}'} - \frac{1}{3} \nabla_{\vec{r}'} \nabla_{\vec{r}'} + \Delta_{\vec{r}'} \right| \psi \dots \right) \right) = \left(\left(\frac{1}{36} \Delta_{\vec{r}'} \psi \right| P_{kl} \dots \psi \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\left| \nabla_{\vec{r}'} \psi \right| \nabla_{\vec{r}'} P_{kl} \dots \psi \right) + \left(\left| \Delta_{\vec{r}'} P_{kl} \dots \right) \right) \right)$$

Dans l'appendice numérique nous trouvons les formules de dérivation et d'intégration qui conduisent à la forme définitive que nous trouvons dans le listing du paragraphe suivant.

G - LISTING DES CONSTITUANTS DE L'INTEGRO-DIFFERENTIELLE

Dans les pages qui suivent nous donnons le listing des noyaux et des fonctions directes de l'équation de la collision

Avec les notations suivantes :

$$(V, 46) \quad ((I | Pq | kl, mn \dots))$$

I précise le type d'intégrales

1°) I = E pour les termes du potentiel d'échange
pq précise les nucléons interagissant

2°) I = N pour les noyaux de normalisation alors p = q = 1

3°) I = K pour les noyaux cinétiques alors p = q = 0

Dans tous les cas, kl, mn .. désigne les paires de nucléons échangés dans la fonction d'onde.

Nous traitons ici le cas $f(\vec{R}_4) = e^{-\frac{\lambda'}{2} \vec{R}_4^2}$

alors

$$(V, 47) \quad \begin{aligned} ((E | Pq | kl, mn \dots)) &= CN \int \dots \int e^{-H(1)\vec{r}^2 - H(2)\vec{r}\vec{r}' - H(3)\vec{r}'^2} \\ ((K | Pq | kl, mn \dots)) &= CN \int \dots \int e^{-H(1)\vec{r}^2 - H(2)\vec{r}\vec{r}' - H(3)\vec{r}'^2} \{B(1) + B(2)\vec{r}^2 + B(3)\vec{r}\vec{r}' + B(4)\vec{r}'^2\} d\vec{r}' \end{aligned}$$

Le cas particulier des termes de potentiel sans échange entre le noyau et le neutron incident s'écrit :

$$(V, 48) \quad ((E | Pq | kl, mn \dots)) = CN e^{-A\vec{r}^2}$$

Nous donnons les coefficients, pour les 2 canaux

$S_T = 3/2$ et $S_T = 1/2$, issus des intégrales sur les spins.

Enfin la variable IADJ = 0 si le noyau correspondant est self adjoint, donc symétrique en $\vec{r}$ et $\vec{r}'$. Alors

$$(\overline{V}, 49) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(1) = H(3) \\ B(2) = B(4) \end{array} \right.$$

Si IADJ = 1 le noyau n'est pas self-adjoint, on le symétrise en ajoutant son symétrique - celui ci étant affecté du même coefficient.

```

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (N/11/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 1
CN= 0.29019E-01 H=        0.19271E 00        0.18381E-01        0.19271E 00
SPIN 3/2 (-1.0)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-1.0)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/56/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 2
CN=-0.32033E 00 H=        0.19271E 00        0.18381E-01        0.19271E 00
SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
SPIN 1/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/34/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 3
CN=-0.55783E 00 H=        0.19271E 00        0.18381E-01        0.19271E 00
SPIN 3/2 (-3.0)W +( 0.0)B +(-3.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-3.0)W +( 0.0)B +(-3.0)M +( 0.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/17/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 4
CN=-0.13581E 01 H=        0.38880E 00        -0.37379E 00        0.38880E 00
SPIN 3/2 (-1.0)W +(-2.0)B +( 4.0)M +( 2.0)H
SPIN 1/2 (-1.0)W +(-2.0)B +( 4.0)M +( 2.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/12/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 5
CN=-0.69586E 00 H=        0.19526E 00        -0.12333E-01        0.28500E 00
SPIN 3/2 (-3.0)W +( 0.0)B +(-3.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-3.0)W +( 0.0)B +(-3.0)M +( 0.0)H
++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/15/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 6
CN=-0.45884E 00 H=        0.24120E 00        0.25119E 00        0.47215E 00
SPIN 3/2 (-2.0)W +(-2.0)B +( 1.0)M +( 1.0)H
SPIN 1/2 (-2.0)W +( 1.0)B +(-0.5)M +( 1.0)H
++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/25/17, 0, 0)      INDEX DU FICHER 7
CN=-0.20752E 00 H=        0.23384E 00        0.10064E 00        0.23384E 00
SPIN 3/2 (-6.0)W +(-2.0)B +( 1.0)M +( 3.0)H
SPIN 1/2 (-6.0)W +(-5.0)B +( 2.5)M +( 3.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (N/11/57, 0, 0)      INDEX DU FICHER 8
CN= 0.62781E-02 H=        0.70461E-01        0.46005E-02        0.70461E-01
SPIN 3/2 (-1.0)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 ( 0.5)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/12/57, 0, 0)      INDEX DU FICHER 9
CN=-0.12068E 00 H=        0.70461E-01        0.46005E-02        0.70461E-01
SPIN 3/2 (-6.0)W +( 0.0)B +(-6.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/57/57, 0, 0)      INDEX DU FICHER 10
CN=-0.29381E 00 H=        0.26655E 00        -0.38757E 00        0.26655E 00
SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +( 2.0)M +( 2.0)H
SPIN 1/2 ( 0.5)W +(-1.0)B +( 2.0)M +(-1.0)H
++++++ IADJ=0 ++++++

```

```

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/16/57, 0, 0)      INDEX DU FICHIER 11
CN=-0.49562E-01  H=      0.88772E-01      0.41222E-01      0.88772E-01
SPIN 3/2 (-4.0)W +(-2.0)B +( 1.0)M +( 2.0)H
SPIN 1/2 ( 2.0)W +( 1.0)B +(-0.5)M +(-1.0)H
+++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/17/57, 0, 0)      INDEX DU FICHIER 12
CN=-0.18074E 00  H=      0.31408E 00      0.12007E 00      0.84145E-01
SPIN 3/2 (-4.0)W +(-2.0)B +( 1.0)M +( 2.0)H
SPIN 1/2 ( 2.0)W +( 1.0)B +(-0.5)M +(-1.0)H
+++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 1 ECHANGE(S)      NOYAU (E/56/57, 0, 0)      INDEX DU FICHIER 13
CN=-0.86365E-01  H=      0.75557E-01      -0.27243E-01      0.12021E 00
SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
SPIN 1/2 ( 0.5)W +( 0.5)B +( 0.5)M +( 0.5)H
+++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (N/11/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 14
CN= 0.34018E-02  H=      0.92170E-01      0.66615E-01      0.92170E-01
SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-0.5)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
+++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/34/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 15
CN=-0.65391E-01  H=      0.92170E-01      0.66615E-01      0.92170E-01
SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-1.5)W +( 0.0)B +(-1.5)M +( 0.0)H
+++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/12/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 16
CN=-0.51729E-01  H=      0.95625E-01      0.66748E-01      0.92171E-01
SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
SPIN 1/2 (-1.5)W +( 0.0)B +(-1.5)M +( 0.0)H
+++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/57/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 17
CN=-0.15920E 00  H=      0.28825E 00      -0.32556E 00      0.28825E 00
SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +(-2.0)M +(-2.0)H
SPIN 1/2 (-0.5)W +( 1.0)B +(-2.0)M +( 1.0)H
+++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/56/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 18
CN=-0.82780E-01  H=      0.99210E-01      0.12913E 00      0.23096E 00
SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +( 1.0)M +( 1.0)H
SPIN 1/2 (-0.5)W +(-0.5)B +(-0.5)M +(-0.5)H
+++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/15/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 19
CN=-0.82780E-01  H=      0.92441E-01      0.81114E-01      0.28576E 00
SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +( 1.0)M +( 1.0)H
SPIN 1/2 (-0.5)W +(-0.5)B +(-0.5)M +(-0.5)H
+++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/16/57,16, 0)      INDEX DU FICHIER 20
CN=-0.39977E-01  H=      0.94968E-01      0.61017E-01      0.94968E-01
SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 2.0)B +(-4.0)M +(-2.0)H
SPIN 1/2 (-0.5)W +(-1.0)B +( 2.0)M +( 1.0)H
+++++ IADJ=0 +++++

```

```

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/27/57,16, 0)      INDEX DU FICHER 21
CN=-0.10209E 00 H=      0.31614E 00      0.15313E 00      0.10052E 00
  SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 1.0)B +(-2.0)M +(-3.0)H
  SPIN 1/2 (-1.5)W +(-0.5)B +( 1.0)M +( 1.5)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (N/11/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 22
CN= 0.89780E-02 H=      0.92186E-01      0.14211E 00      0.24496E 00
  SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
  SPIN 1/2 (-0.5)W +( 0.0)B +( 0.0)M +( 0.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/34/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 23
CN=-0.17258E 00 H=      0.92186E-01      0.14211E 00      0.24496E 00
  SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
  SPIN 1/2 (-1.5)W +( 0.0)B +(-1.5)M +( 0.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/56/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 24
CN=-0.88982E-01 H=      0.99558E-01      0.13631E 00      0.24610E 00
  SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +( 1.0)M +( 1.0)H
  SPIN 1/2 (-0.5)W +(-0.5)B +(-0.5)M +(-0.5)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/57/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 25
CN=-0.23205E 00 H=      0.30242E 00      0.24945E 00      0.25866E 00
  SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +(-2.0)M +(-2.0)H
  SPIN 1/2 (-0.5)W +( 1.0)B +(-2.0)M +( 1.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/67/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 26
CN=-0.14381E 00 H=      0.17637E 00      0.22300E 00      0.26439E 00
  SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +( 1.0)M +( 1.0)H
  SPIN 1/2 (-0.5)W +(-0.5)B +(-0.5)M +(-0.5)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/17/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 27
CN=-0.42017E 00 H=      0.28827E 00      -0.25006E 00      0.44105E 00
  SPIN 3/2 ( 1.0)W +( 1.0)B +(-2.0)M +(-2.0)H
  SPIN 1/2 (-0.5)W +( 1.0)B +(-2.0)M +( 1.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/12/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 28
CN=-0.25145E 00 H=      0.10211E 00      0.22214E 00      0.40617E 00
  SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
  SPIN 1/2 (-1.5)W +( 0.0)B +(-1.5)M +( 0.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/25/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 29
CN=-0.13589E 00 H=      0.92188E-01      0.14188E 00      0.25057E 00
  SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 0.0)B +( 3.0)M +( 0.0)H
  SPIN 1/2 (-1.5)W +( 0.0)B +(-1.5)M +( 0.0)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S)      NOYAU (E/26/17,15, 0)      INDEX DU FICHER 30
CN=-0.78782E-01 H=      0.99195E-01      0.12623E 00      0.25395E 00
  SPIN 3/2 ( 3.0)W +( 1.0)B +(-2.0)M +(-3.0)H
  SPIN 1/2 (-1.5)W +(-0.5)B +( 1.0)M +( 1.5)H
                        +++++ IADJ=1 +++++

```

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/27/17,15, 0) INDEX DU FICHIER 31
 CN=-0.25145E 00 H= 0.31575E 00 0.16890E 00 0.24577E 00
 SPIN 3/2 (3.0)W +(1.0)B +(1.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(-2.0)B +(2.5)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/15/17,15, 0) INDEX DU FICHIER 32
 CN=-0.23205E 00 H= 0.10125E 00 0.23357E 00 0.47572E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(2.0)B +(-4.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (-0.5)W +(-1.0)B +(2.0)M +(1.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/16/17,15, 0) INDEX DU FICHIER 33
 CN=-0.14381E 00 H= 0.92570E-01 0.12450E 00 0.44670E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(1.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (-0.5)W +(-0.5)B +(-0.5)M +(-0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (N/11/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 34
 CN= 0.13665E-01 H= 0.24450E 00 0.14515E 00 0.24450E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/34/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 35
 CN=-0.26268E 00 H= 0.24450E 00 0.14515E 00 0.24450E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(1.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(-2.0)B +(2.5)M +(-2.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/56/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 36
 CN=-0.14137E 00 H= 0.25504E 00 0.15460E 00 0.24662E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(1.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(2.5)B +(2.5)M +(2.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/23/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 37
 CN=-0.20685E 00 H= 0.25003E 00 0.14665E 00 0.24461E 00
 SPIN 3/2 (2.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (5.0)W +(2.0)B +(5.0)M +(2.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 38
 CN=-0.63955E 00 H= 0.44059E 00 -0.24702E 00 0.44059E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(3.0)B +(-6.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(3.0)B +(-6.0)M +(-5.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/12/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 39
 CN=-0.33463E 00 H= 0.25640E 00 0.23034E 00 0.39697E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(1.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(-2.0)B +(2.5)M +(-2.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/13/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 40
 CN=-0.37785E 00 H= 0.24502E 00 0.16308E 00 0.39998E 00
 SPIN 3/2 (2.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (5.0)W +(2.0)B +(5.0)M +(2.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/15/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 41
 CN=-0.24984E 00 H= 0.26841E 00 0.29306E 00 0.47330E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(1.0)B +(-2.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(-0.5)B +(1.0)M +(-0.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/16/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 42
 CN=-0.33463E 00 H= 0.24564E 00 0.17650E 00 0.46158E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(0.0)B +(3.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(0.0)B +(-1.5)M +(-2.0)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/26/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 43
 CN=-0.16059E 00 H= 0.24799E 00 0.13817E 00 0.24799E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(3.0)B +(-6.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(3.0)B +(-6.0)M +(-5.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/35/17,26, 0) INDEX DU FICHIER 44
 CN=-0.13370E 00 H= 0.25648E 00 0.16911E 00 0.25648E 00
 SPIN 3/2 (2.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (5.0)W +(3.0)B +(-6.0)M +(-7.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (N/11/17,15,26) INDEX DU FICHIER 45
 CN= 0.61476E-02 H= 0.90910E-01 0.91095E-01 0.24229E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/34/17,15,26) INDEX DU FICHIER 46
 CN=-0.11817E 00 H= 0.90910E-01 0.91095E-01 0.24229E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.5)B +(0.5)M +(0.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/56/17,15,26) INDEX DU FICHIER 47
 CN=-0.95930E-01 H= 0.90910E-01 0.91095E-01 0.24229E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.5)B +(0.5)M +(0.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/23/17,15,26) INDEX DU FICHIER 48
 CN=-0.92492E-01 H= 0.95358E-01 0.95439E-01 0.24335E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(1.0)B +(-2.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(-0.5)B +(1.0)M +(-0.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/17,15,26) INDEX DU FICHIER 49
 CN=-0.28771E 00 H= 0.28700E 00 -0.30108E 00 0.43838E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(2.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(-1.0)B +(2.0)M +(-1.0)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/57/17,15,26) INDEX DU FICHIER 50
 CN=-0.15482E 00 H= 0.30918E 00 0.21689E 00 0.26041E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(-2.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(-0.5)B +(2.5)M +(-0.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/15/17,15,26) INDEX DU FICHER 51
 CN=-0.15482E 00 H= 0.10236E 00 0.19700E 00 0.48713E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(-3.0)B +(3.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(1.5)B +(-1.5)M +(-0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/37/17,15,26) INDEX DU FICHER 52
 CN=-0.18044E 00 H= 0.30075E 00 0.13274E 00 0.24435E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(1.5)B +(-3.0)M +(-0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/12/17,15,26) INDEX DU FICHER 53
 CN=-0.14000E 00 H= 0.90925E-01 0.88313E-01 0.36667E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.5)B +(0.5)M +(0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/13/17,15,26) INDEX DU FICHER 54
 CN=-0.18044E 00 H= 0.97157E-01 0.15820E 00 0.42249E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(1.0)B +(-2.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(-0.5)B +(1.0)M +(-0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/26/17,15,26) INDEX DU FICHER 55
 CN=-0.66842E-01 H= 0.98101E-01 0.10793E 00 0.25215E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(-3.0)B +(3.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (1.0)W +(1.5)B +(-1.5)M +(-0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/27/17,15,26) INDEX DU FICHER 56
 CN=-0.14000E 00 H= 0.20949E 00 0.94109E-01 0.24230E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(-1.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.5)B +(0.5)M +(0.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/35/17,15,26) INDEX DU FICHER 57
 CN=-0.92801E-01 H= 0.91634E-01 0.95245E-01 0.24823E 00
 SPIN 3/2 (-4.0)W +(2.0)B +(-4.0)M +(2.0)H
 SPIN 1/2 (2.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(-1.0)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (N/11/17,26,35) INDEX DU FICHER 58
 CN= 0.13255E-01 H= 0.24945E 00 0.20923E 00 0.24945E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/12/17,26,35) INDEX DU FICHER 59
 CN=-0.30399E 00 H= 0.26844E 00 0.30949E 00 0.38177E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-3.0)W +(1.5)B +(-3.0)M +(1.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/23/17,26,35) INDEX DU FICHER 60
 CN=-0.20684E 00 H= 0.24945E 00 0.20923E 00 0.24945E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(-1.5)B +(-1.5)M +(-1.5)H
 ++++++ IADJ=1 ++++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/14/17,26,35) INDEX DU FICHER 61
 CN=-0.38482E 00 H= 0.25174E 00 0.24993E 00 0.43049E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(-1.5)B +(-1.5)M +(-1.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/34/17,26,35) INDEX DU FICHER 62
 CN=-0.19391E 00 H= 0.25594E 00 0.20513E 00 0.25010E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-3.0)W +(1.5)B +(-3.0)M +(1.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/17,26,35) INDEX DU FICHER 63
 CN=-0.62034E 00 H= 0.44554E 00 -0.18294E 00 0.44554E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(-1.0)B +(2.0)M +(3.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/15/17,26,35) INDEX DU FICHER 64
 CN=-0.30399E 00 H= 0.24966E 00 0.22349E 00 0.48655E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(1.0)B +(-2.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-3.0)W +(-0.5)B +(1.0)M +(1.5)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (E/35/17,26,35) INDEX DU FICHER 65
 CN=-0.13227E 00 H= 0.25816E 00 0.19181E 00 0.25816E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(-1.0)B +(2.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-6.0)W +(-7.0)B +(5.0)M +(3.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 1 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/17, 0, 0) INDEX DU FICHER 66
 CN=-0.60176E 00 H= 0.19271E 00 0.18381E-01 0.19271E 00
 B=-0.54079E 01 0.18074E 00-0.35367E-01 0.18074E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/17,15, 0) INDEX DU FICHER 67
 CN=-0.18616E 00 H= 0.92186E-01 0.14211E 00 0.24496E 00
 B=-0.49486E 01 0.82637E-01 0.20985E 00 0.30267E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-0.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/17,15,26) INDEX DU FICHER 68
 CN=-0.12747E 00 H= 0.90910E-01 0.91095E-01 0.24229E 00
 B=-0.46793E 01 0.52079E-01 0.11538E 00 0.29296E 00
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 +++++ IADJ=1 +++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/17,26, 0) INDEX DU FICHER 69
 CN=-0.28337E 00 H= 0.24450E 00 0.14515E 00 0.24450E 00
 B=-0.55647E 01 0.30258E 00 0.24840E 00 0.30258E 00
 SPIN 3/2 (1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (2.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 +++++ IADJ=0 +++++

+++++++ 3 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/17,26,35) INDEX DU FICHIER 70
 N=-0.27486E 00 H= 0.24945E 00 0.20923E 00 0.24945E 0
 =-0.54412E 01 0.32815E 00 0.38957E 00 0.32815E 00
 SPIN 3/2 (0.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-1.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/57,00,00) INDEX DU FICHIER
 N=-0.13018E 00 H= 0.70461E-01 0.46005E-02 0.70461E-0
 =-0.42293E 01 0.26222E-01-0.10091E-01 0.26222E-01
 SPIN 3/2 (-1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (0.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (K/ 0/57,16,00) INDEX DU FICHIER
 N=-0.70540E-01 H= 0.92170E-01 0.66615E-01 0.92170E-0
 =-0.40507E 01 0.50808E-01 0.49072E-01 0.50808E-01
 SPIN 3/2 (1.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 SPIN 1/2 (-0.5)W +(0.0)B +(0.0)M +(0.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 0 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/ 0, 0, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.21862E 02 A= 0.16069E 00
 SPIN 3/2 (4.0)W +(2.0)B +(-1.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (4.0)W +(2.0)B +(-1.0)M +(-2.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 0 ECHANGE(S) NOYAU (E/57/ 0, 0, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.98091E 01 A= 0.94175E-01
 SPIN 3/2 (2.0)W +(2.0)B +(-1.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (2.0)W +(-1.0)B +(0.5)M +(-1.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/15, 0, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.57641E 01 A= 0.17143E 00
 SPIN 3/2 (-4.0)W +(-4.0)B +(2.0)M +(2.0)H
 SPIN 1/2 (-4.0)W +(2.0)B +(-1.0)M +(2.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S) NOYAU (E/27/15, 0, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.66114E 01 A= 0.18784E 00
 SPIN 3/2 (-6.0)W +(-2.0)B +(1.0)M +(3.0)H
 SPIN 1/2 (-6.0)W +(-5.0)B +(2.5)M +(3.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 1 ECHANGE(S) NOYAU (E/67/15, 0, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.37775E 01 A= 0.12934E 00
 SPIN 3/2 (-2.0)W +(-2.0)B +(1.0)M +(1.0)H
 SPIN 1/2 (-2.0)W +(1.0)B +(-0.5)M +(1.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/17/15,26, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.44271E 01 A= 0.16383E 00
 SPIN 3/2 (4.0)W +(4.0)B +(-2.0)M +(-2.0)H
 SPIN 1/2 (4.0)W +(-2.0)B +(1.0)M +(-2.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

+++++++ 2 ECHANGE(S) NOYAU (E/37/15,26, 0) INDEX DU FICHIER
 N=-0.56972E 01 A= 0.19384E 00
 SPIN 3/2 (2.0)W +(0.0)B +(0.0)M +(-1.0)H
 SPIN 1/2 (2.0)W +(3.0)B +(-1.5)M +(-1.0)H
 ++++++ IADJ=0 ++++++

CHAPITRE VI

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA COLLISION

LES RESULTATS

- A - Introduction
- B - Méthode numérique de résolution
- C - Calcul des sections efficaces
- D - Les résultats

A - INTRODUCTION

La résolution des équations integro-différentielles du type

$$(VI, 1) \quad \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right\} f(r) + u(r) f(r) = \int_0^\infty k(r, r') f(r') dr'$$

peut se faire de deux façons :

- 1°) Méthode itérative : On introduit dans l'intégrale du second membre une fonction d'essai $f_1(r')$ connue afin d'effectuer le calcul complètement. On est conduit alors à la résolution d'une équation différentielle du second ordre ; la solution $f_2(r)$ est introduite à nouveau sous le signe intégral du second membre ce qui conduit à une solution $f_3(r)$ etc...

Ce procédé utilisé par Buckingham et Massey (14) est assez lourd et la convergence peut être lente.

- 2°) Méthode numérique conduisant à la résolution d'équations linéaires simultanées. Cette méthode a été exposée en détail par H.H. Robertson (52). Elle se prête bien à la programmation sur ordinateur, aussi c'est celle-ci que nous utiliserons. D'ailleurs, la majeure partie des travaux sur les collisions, dans le cadre du modèle en groupes résonnants, a été faite avec cette méthode.

B - METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES.

Tout d'abord nous posons, pour simplifier l'écriture :

$$(VI, II) \quad v(r) = u(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2$$

Il vient :

$$(VI, III) \quad \frac{d^2}{dr^2} f(r) + v(r) f(r) = \int_0^\infty k(r, r') f(r') dr'$$

Le noyau intégral, avec notre formulation, a une décroissance Gaussienne, et $f(r)$ est bornée ; donc nous pouvons écrire pour R' assez grand :

$$(VI, IV) \quad \int_0^\infty k(r, r') f(r') dr' \approx \int_0^{R'} k(r, r') f(r') dr'$$

Cette intégrale peut se tabuler à l'aide de la formule de Gregory.

$$r \equiv r_n, \quad \int_0^{R'} k(r_n, r') f(r') dr' = \sum_{m=0}^N h T_m k_{nm} f_m$$

avec h pas de tabulation

et $R' = Nh$

D'autre part, au point r_n :

$$(VI, 5) \quad h^2 f_n'' = f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1} - \frac{1}{12} S^4 f_n + \frac{1}{90} S^6 f_n \dots$$

L'équation (VI, 3) devient au point r_n

$$(VI, 6) \quad f_{n-1} - (2 - h^2 v_n) f_n + f_{n+1} = h^3 \sum_{m=0}^N k_{nm} T_m f_m + C_n$$

$$\text{avec } C_n = \left(\frac{1}{12} S^4 - \frac{1}{90} S^6 \right) f_n$$

Pour diminuer l'importance du terme correctif C_n on utilise la méthode que Fox et Goodwin utilisèrent pour résoudre les équations différentielles du type

$$y''(x) = f(x)y(x)$$

On multiplie les 2 membres de (VI, 6) par $\left(1 + \frac{\delta^2}{12}\right)$

Il vient :

$$\begin{aligned} \text{(VI, 7)} \quad & \left(1 + \frac{1}{12} h^2 \mathcal{V}_{n+1}\right) f_{n-1} - \left(2 - \frac{10}{12} h^2 \mathcal{V}_n\right) f_n + \left(1 + \frac{1}{12} h^2 \mathcal{V}_{n+1}\right) f_{n+1} \\ & = \frac{h^3}{12} \sum_{m=0}^N \left(k_{n-1,m} + 10 k_{n,m} + k_{n+1,m}\right) T_m f_m + C'_n \end{aligned}$$

avec $C'_n = \left(-\frac{1}{240} \delta^6 + \dots\right) f_n$ que l'on néglige.

Une fois introduites les conditions initiales, (VI, 7) conduit à un système d'équations linéaires. Les solutions de ces équations dépendent du choix de N et h .

1°) Les conditions initiales

Les fonctions d'ondes du noyau étant bornées à l'origine nous avons : $f_0 = 0$

Et nous prenons : $f_1 = 1$

Tout autre choix de f_1 conduirait à un multiple de la solution.

Une difficulté apparaît alors dans (VI, 7) ; car si $n = 1$, se pose le problème de trouver la valeur de :

$$\frac{h^2}{12} \mathcal{V}_0 f_0$$

La méthode de Frobenius appliquée à (VI, 6) montre que pour r petit

$$(VI, 8) \quad f_l(r) = a_0 l^l r^{l+1} + a_1 l^l r^{l+2} + \dots$$

on prend

$$\frac{h^2}{12} v_0 f_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{12} h^2 v(r) f(r) \\ = 0 \quad \text{si } l \neq 1$$

$$l=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{h^2}{12} v_0 f_0 = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h^2}{12} \frac{2}{r^2} a_0 l^2 = -\frac{h^2}{6} a_{0,1}$$

On détermine $a_{0,1}$, en calculant $f_l(r)$ au point h et en se limitant au premier terme du développement

$$a_{0,1} = \frac{1}{h^2}$$

(VI, 9)

et

$$\frac{h^2}{12} v_0 f_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq 1 \\ -\frac{1}{6} & \text{si } l = 1 \end{cases}$$

2°) Le système d'équations linéaires simultanées

L'insertion des conditions initiales conduit à $N-2$ équations à $N-2$ inconnues, que l'on peut écrire sous la forme :

$$A X = B$$

X est le vecteur de colonne avec

$$X(I) = f_{I+1}$$

Dont la connaissance donne la fonction de diffusion tabulée point par point.

A et B sont donnés par les relations :

$$B(1) = \frac{h^2}{12} v_0 f_0 - \left(2 - \frac{10}{12} h^2 v_1 \right) - \frac{h^3}{12} (k_{0,1} + 10 k_{1,1} + k_{2,1}) T_1$$

$$B(2) = + \left(1 + \frac{1}{12} h^2 v_1 \right) - \frac{h^3}{12} (k_{1,1} + 10 k_{2,1} + k_{3,1}) T_1$$

$$3 \leq n \leq 38$$

$$B(n) = - \frac{h^3}{12} (k_{n-1,1} + 10 k_{n,1} + k_{n+1,1}) T_1$$

$$p \in [v, v-2]$$

$$A(v, p) = \frac{h^3}{12} (k_{v-1, p+1} + 10 k_{v, p+1} + k_{v+1, p+1})$$

$$p = v$$

$$A(v, v) = \frac{h^3}{12} (k_{v-1, v+1} + 10 k_{v, v+1} + k_{v+1, v+1}) - \left(1 + \frac{h^2}{12} v_{v+1} \right)$$

$$p = v-1$$

$$A(v, v-1) = \frac{h^3}{12} (k_{v-1, v} + 10 k_{v, v} + k_{v+1, v}) + \left(2 - \frac{10 h^2}{12} v_v \right)$$

$$p = v-2$$

$$A(v, v-2) = \frac{h^3}{12} (k_{v-1, v-1} + 10 k_{v, v-1} + k_{v+1, v-1}) - \left(1 + \frac{h^2}{12} v_{v-1} \right)$$

$$T_0 = T_N = 0.315 \ 591 \ 931$$

$$T_1 = T_{N-1} = 1.332 \ 179 \ 234$$

$$T_2 = T_{N-2} = 0.623 \ 974 \ 867$$

$$T_3 = T_{N-3} = 1.244 \ 080 \ 687$$

$$T_4 = T_{N-4} = 0.909 \ 904 \ 100$$

$$T_5 = T_{N-5} = 1.014 \ 269 \ 180$$

$$T_m = 1 \quad 6 \leq m \leq N-6$$

3°) Le choix de N et h

- Le choix de N nous est imposé par la taille de l'ordinateur. En effet, pour avoir une résolution relativement rapide du système d'équations, il est nécessaire d'amener les matrices A et B ensemble et entièrement dans la mémoire centrale. Nous avons pour l'ordinateur IBM 1130 utilisé

$$N = 40$$

A est alors une matrice carrée 38 x 38

- Le choix de h doit satisfaire à deux exigences contradictoires.

D'abord, h doit être suffisamment grand pour que $k(r, r')$ soit négligeable quand $r, r' \simeq Nh$ et pour que les derniers éléments de X représentent bien la limite asymptotique de la fonction de diffusion (condition nécessaire à l'obtention des phases).

D'autre part, h doit être suffisamment petit pour que la résolution de l'équation soit précise, notamment pour r petit. A ces distances, les interactions sont maximales et une étude pas assez fine peut conduire à de grandes variations sur les phases.

Pour concilier ces deux exigences, on peut choisir un pas h variable : $h = h_0$ au voisinage de l'origine, $h = 2h_0$ plus loin etc...

Mais comme le note W. Laskar (35) "Cette analyse plus détaillée ne semble pas apporter des résultats en rapport avec le travail qu'elle nécessite".

Nous prendrons h unique avec $h=0,25$ fermi, le domaine d'intégration de l'équation différentielle est alors de 10 fermis.

C - CALCUL DES SECTIONS EFFICACES

Selon la théorie classique de l'analyse en ondes partielles des diffusions (33, 44), pour un l donné, la solution $f_l(r)$ obtenue par la résolution de l'équation intégral-différentielle a le comportement asymptotique :

$$(VI, 10) \quad f_l(r) = A \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} J_{l+1/2}(kr) + B (-1)^l \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} J_{l-1/2}(kr)$$

Et le déphasage δ_l s'écrit :

$$(VI, 11) \quad \tan \delta_l = \frac{B}{A}$$

l'amplitude de diffusion s'écrit :

$$(VI, 12) \quad f_l(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

ce qui donne la section efficace différentielle

$$(VI, 13) \quad \sigma(\theta) = |f_l(\theta)|^2$$

et la section efficace totale :

$$(VI, 14) \quad \sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Cependant, dans notre étude, nous avons pour l donné, deux canaux correspondant au spin total $S_1 = 1/2$, ou $S_2 = 3/2$.

Nous faisons l'étude avec des particules non polarisées. Aussi la section efficace différentielle pour les 2 canaux s'écrit en tenant compte des 2 orientations de spin possibles :

$$(VI, 15) \quad \begin{aligned} \sigma_v(\theta) &= \frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \sum_{l=1}^2 (2S_l+1) \sigma^{S_l}(\theta) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 4 \sigma^{3/2}(\theta) + 2 \sigma^{1/2}(\theta) \right\} \end{aligned}$$

Il en est de même pour la section efficace totale.

Avant d'en arriver à l'exposé des résultats et à leur interprétation deux problèmes se posent , qui sont liés à la méthode de résolution de l'équation intégral-différentielle .

- les déphasages sont connus à π près , cette indétermination gêne l'interprétation des déphasages , au voisinage des énergies nulles notamment .

On sait que :

$$\delta_l = n\pi \quad \text{si } E \rightarrow 0$$

n est le nombre d'états liés de moment angulaire l .

La méthode précise pour connaître les comportements aux basses énergies consiste à faire le calcul à très haute énergie dans les régions où les déphasages tendent vers zéro strictement; par continuité, on remonte aux déphasages dans les régions d'énergie où notre étude est significative.

Cependant cette méthode, qui est parfaitement rigoureuse pour les équations différentielles avec potentiel local , doit être appliquée avec soin pour les équations intégral-différentielles. (cf MOTT et MASSEY , 47)

-La méthode numérique employée peut donner des solutions qui n'ont pas de sens physique . En particulier, les fonctions φ_i pour A nucléons (si elles existent) qui satisfont à

$$A\varphi_i(1, \dots, A) \equiv 0 \quad \text{et opérateur d'antisymétrisation}$$

sont toujours solutions de l'équation de diffusion

$$\int \varphi_i^* |H-E| A\varphi_i d\tau = 0$$

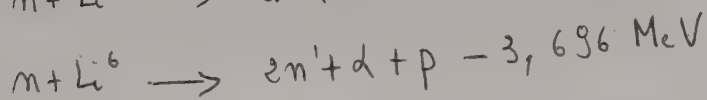
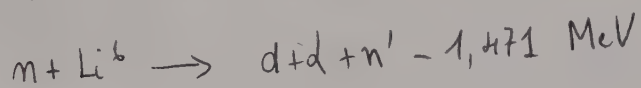
Ces fonctions φ_i correspondent à des états liés interdits par le principe de PAULI , elles s'annihilent lorsque elles sont antisymétrisées. Cependant, elles sont très rapidement décroissantes; nous calculerons donc les déphasages pour différents points de la fonction de diffusion ; lorsque les déphasages ainsi calculés sont stables , aucune fonction qui n'a pas le comportement asymptotique voulu , n'est contenue dans la solution .

Dans le cas particulier de la diffusion $n\text{-Li}^6$ étudié ici, si nous donnons aux paramètres les valeurs du modèle en couches, toute fonction d'onde mettant le neutron dans un état (1s) est identiquement nulle.

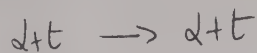
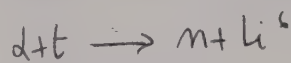
D - LES RESULTATS

A l'encontre des collisions traitées jusqu'ici dans le cadre du modèle en groupes de résonance, la collision $n\text{-Li}^6$ possède un grand nombre de canaux de sortie ouverts, à toutes les énergies. Ceci donne une limite à la précision que l'on peut espérer dans les résultats.

Parmi les principales réactions possibles, nous citerons, outre la diffusion élastique:



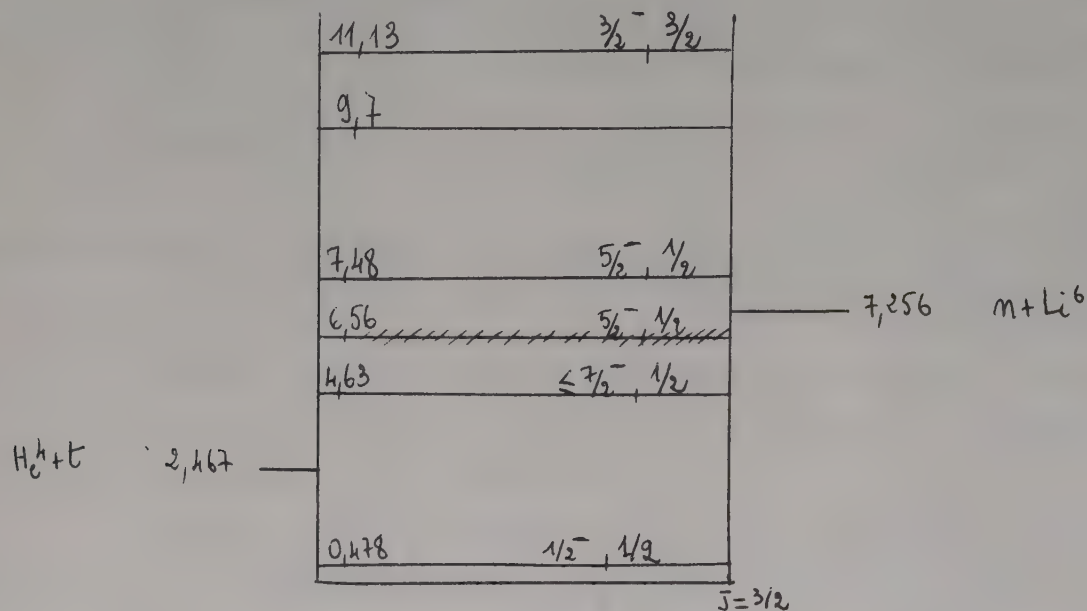
La collision donnant un "d" et un "t" est possible, dès les énergies quasi nulles: son influence risque donc d'être importante. Nous pensons qu'il serait intéressant d'inclure dans nos calculs la réaction à 2 canaux:



Puisque nous nous plaçons dans le cas du couplage $\vec{L} \cdot \vec{S}$ avec potentiel central, le canal $d+t$ ne peut influencer que la réaction $n\text{-Li}^6$ pour un spin total $1/2$.

La collision $n\text{-Li}^6$ permet d'atteindre théoriquement les niveaux du Li^7 excités de plus de 7,25 MeV .

Ci-dessous nous donnons - tirés de la récente compilation (29) - les principaux niveaux du Li^7 .

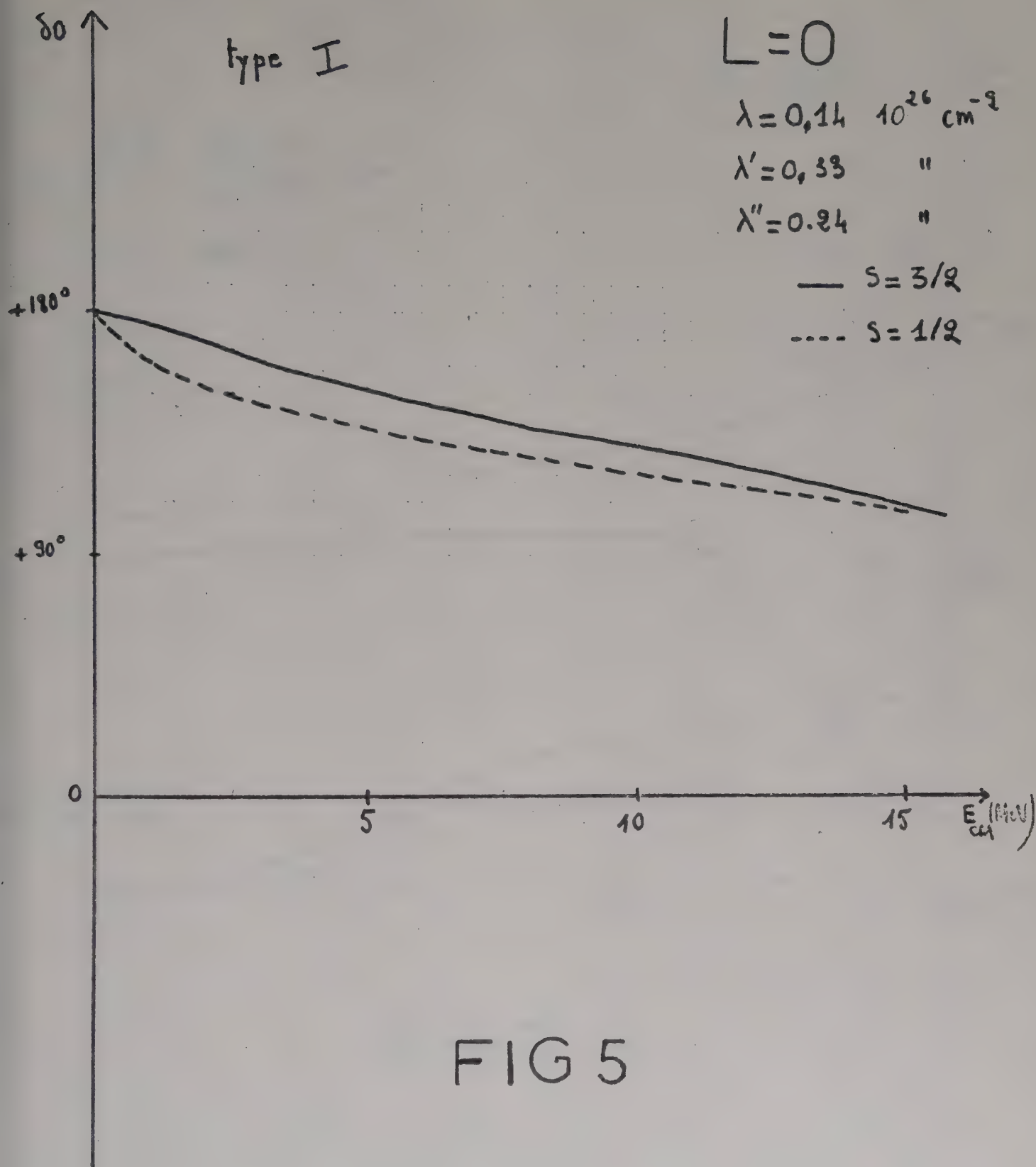


Nous pouvons noter déjà que rien n'est connu ou presque des niveaux de parité positive; bien que l'on ait assigné la parité positive au niveau de 6,56 MeV, pendant quelque temps.

Les niveaux jusqu'à 6,56 MeV ont été étudiés dans le cadre du modèle en amas (61) avec la structure α -t.

Dans les pages qui suivent, nous présentons les déphasages de la collision élastique $n\text{-Li}^6$ pour des moments angulaires $0 \leq l \leq 3$ et les canaux de spin $S=3/2$ et $S=1/2$.

Ils ont été obtenus avec la fonction d'onde du Li^6 étudiée plus haut, avec les paramètres $\lambda, \lambda', \lambda''$ ayant donné la valeur optimale pour l'énergie de liaison.



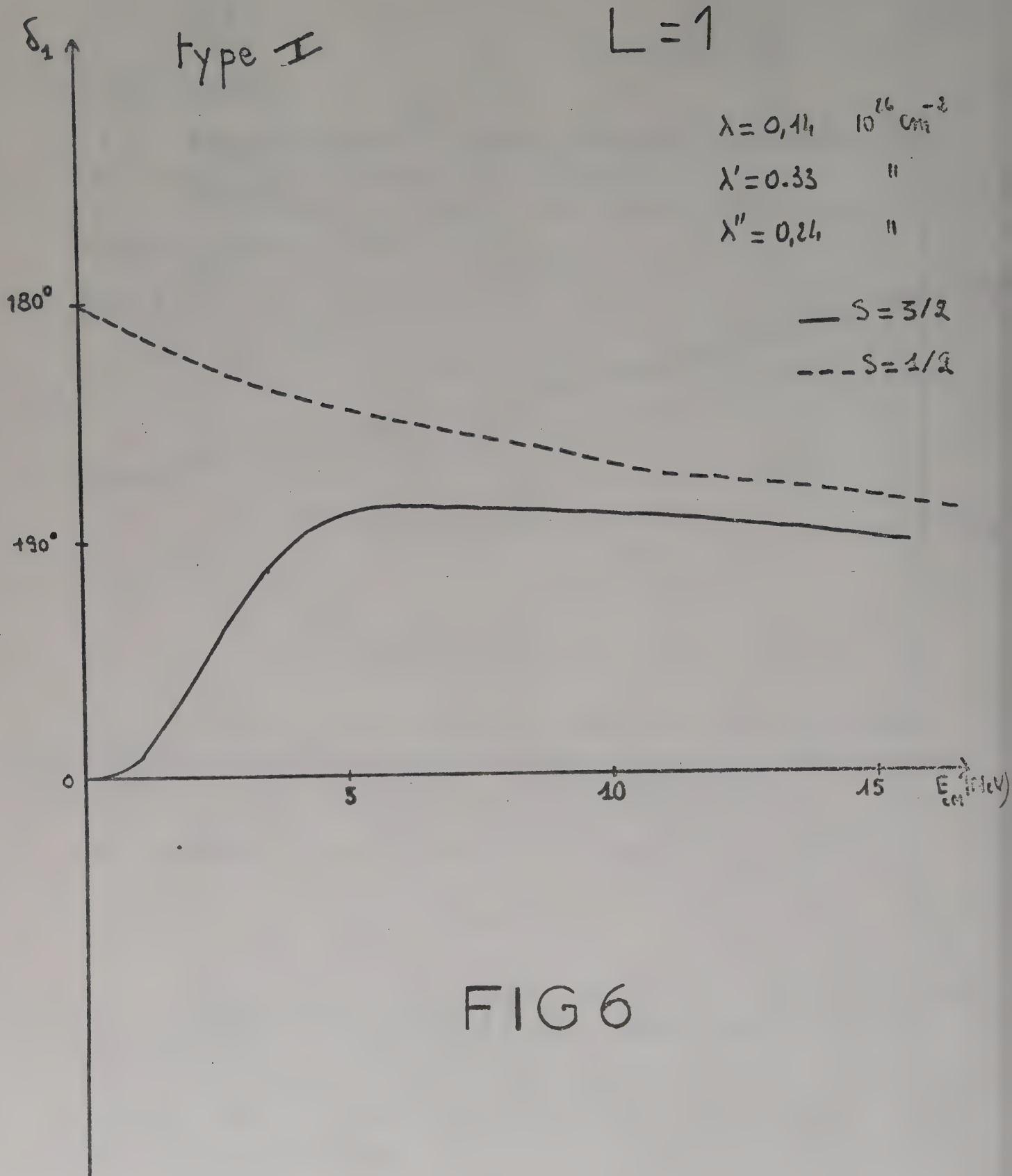
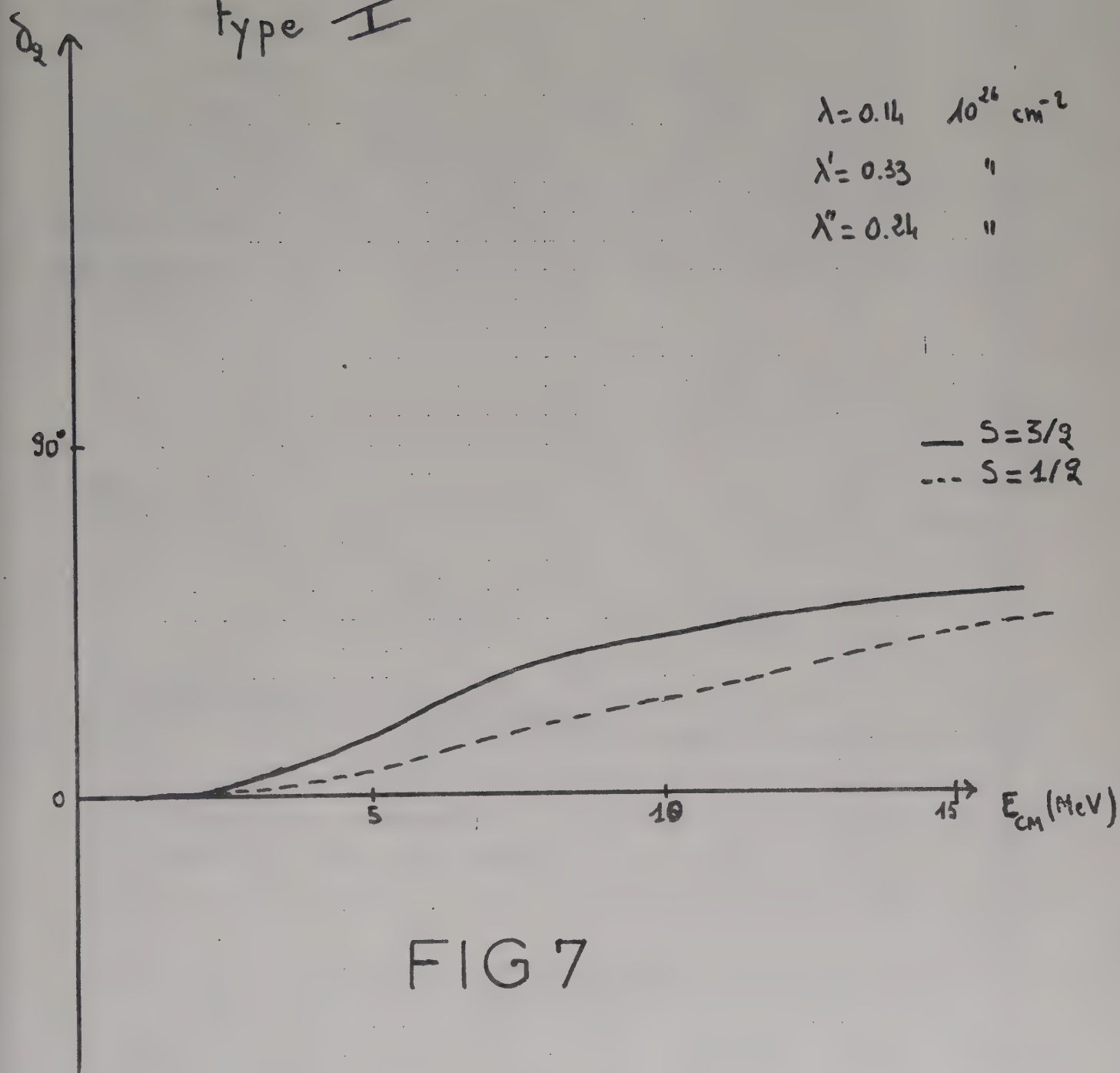


FIG 6

$$L=2$$

type I



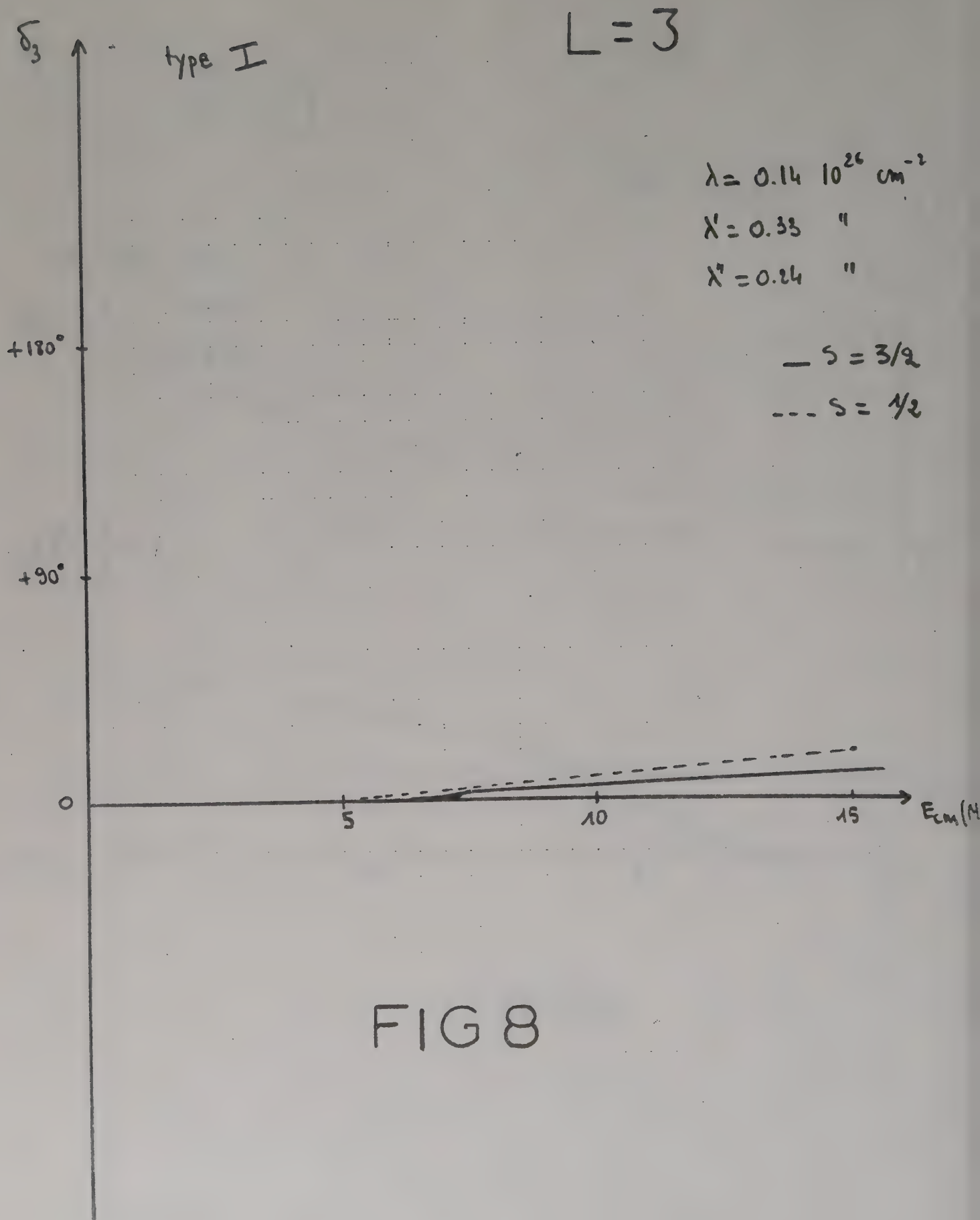


FIG 8

a) $L=0$

Pour les ondes S, dans les deux canaux de spin, nous obtenons des déphasages qui tendent vers π aux énergies voisines de zéro. Nous sommes dans le cas où le théorème de Levinson ne s'applique pas. En effet, le principe de Pauli implique que si de tels états existent, ils sont obtenus avec un nucléon dans l'état $2s$ relativement au Li^6 ; ceci donne des niveaux d'énergies très au-dessus de 7,25 Mev.

b) $L=1$

Les déphasages obtenus mettent en évidence des niveaux du Li^7 qui sont connus expérimentalement.

- $L=1, S=1/2$ Pour des énergies nulles, nous obtenons un déphasage de π . Expérimentalement, on peut lui associer les niveaux les plus bas du Li^7 : $^2P_{1/2}$ et $^2P_{3/2}$. Nous ne pouvons les dissocier puisque nous sommes placés dans le cas d'un potentiel central.

- $L=1, S=3/2$ Le déphasage passe à $\pi/2$ à 3,5 Mev. Cette résonance correspond au niveau $^4P_{5/2}$ que l'expérience situe plus bas à 0,25 Mev. Ce désaccord n'est pas étonnant en raison des approximations avec lesquelles le calcul a été effectué. D'autre part, le Li^6 a une structure aisément polarisable en raison de la faible énergie de liaison du deutéron et de la faible liaison entre l' α et le deutéron. Nous avons assigné aux paramètres les valeurs obtenues pour le Li^6 libre, c'est approximatif aux voisinages des résonances.

De toute façon, cela confirme la structure n- Li^6 du niveau $^{24}P_{5/2}$ du Li^7 qui avait été pressentie dans les études précédentes. Khanna, ... (32) ont calculé l'énergie de cet état lié du Li^7 avec la même configuration, ils trouvent une énergie de liaison qui s'avère elle aussi trop haute.

c) $L=2, L=3$

Pour les 2 spins, les déphasages correspondants ne présentent aucune résonance.

Les états du Li^7 que nous étudions dans cette collision proviennent d'une cassure de l'amas H_3



Les résultats de nos calculs dépendent beaucoup des paramètres du Li^6 et notamment de celui qui est lié à la description du deutéron ; ainsi nous avons effectué deux calculs :

1) L'un avec le modèle en couches

En posant $\lambda = a/4$ $\lambda' = a/2$ $\lambda'' = \frac{4}{3} a$, a est le paramètre classique du modèle en couches.

$a = 0,433 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$ assure un compromis entre une énergie de liaison la meilleure possible et un rayon carré moyen pas trop faible.

$$E_{\text{Li}^6} = -25,5 \text{ MeV} \qquad \bar{\eta}_{\text{Li}^6} = 1,91 \text{ fermi}$$

Les déphasages sont présentés à la figure 9

Pour $L=0$, $S=3/2$, $1/2$ et $L=1$, $S=1/2$ les déphasages ne sont pas notablement modifiés, par contre, la résonance $L=1$, $S=3/2$ est atteinte très difficilement vers 15 MeV.

Une des caractéristiques du modèle en couches utilisé est de ne supposer aucune corrélation particulière entre les nucléons, notamment les nucléons (1p).

2) l'autre avec le modèle α -d

Pour étudier l'influence de la forme du deutéron, nous avons posé $\lambda = \lambda''$.

Les résultats sont présentés Fig 10 et Fig 11 .

Les déphasages pour $L=1$ ne sont pas différents , mais la résonance pour $S=3/2$ est un peu moins diffuse.

Pour les états $L=0$, les 2 déphasages ont un comportement résonnant pour des énergies de 8 MeV ($S=3/2$) et 9 MeV ($S=1/2$). Le déphasage pour $S=3/2$ tend vers π si l'énergie tend vers zéro.

modèle en couches

$$a = 0.433 \cdot 10^{26} \text{ cm}^{-2}$$

$$S = 3/2 \left\{ \begin{array}{l} \text{---} L = 0 \\ \text{---} L = 1 \end{array} \right.$$

$$S = 1/2 \left\{ \begin{array}{l} +++ L = 0 \\ \text{.....} L = 1 \end{array} \right.$$

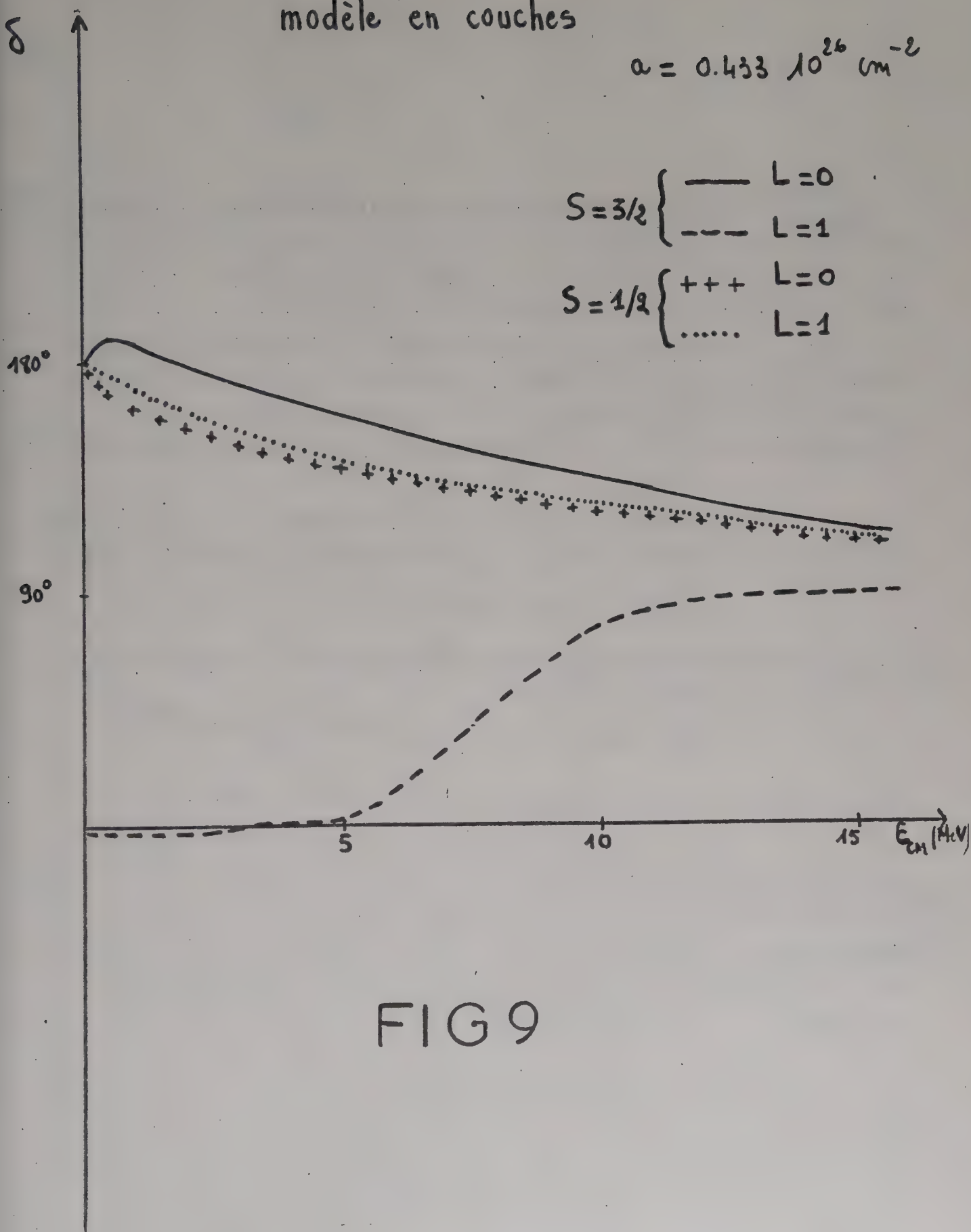


FIG 9

De l'étude des deux cas-limite précédents, il apparaît donc que la résonance $L=1, S=3/2$ a lieu lorsque les deux nucléons (1p) sont groupés pour former un noyau deutéron. La position varie relativement peu en fonction du paramètre λ .

Par contre, le comportement des déphasages pour $L=0$ semble indiquer que nous sommes en présence du cas où la relation $\delta(0) - \delta(\infty) = n\pi$ n nombre d'états liés n'est plus valable, en raison du caractère non local du potentiel.

Swan(59) l'a noté le premier. Mais, on peut montrer que pour les équations intégral-différentielles la relation s'écrit:

$$\delta_0(0) - \delta_0(\infty) = (n + \Delta)\pi \quad (47)$$

Δ est le nombre de solutions indépendantes s'annulant à l'infini de l'équation intégrale :

$$f_0(r) = \sin kr + \int_0^\infty \int_0^\infty M_0(r, r') K_0(r', r'') f_0(r'') dr'' dr'$$

$$M_0(r, r') = -k^{-1} \sin(kr^<) \cos(kr^>)$$

Cette équation intégrale (pour $L=0$) est équivalente à l'équation intégral-différentielle de diffusion. (47).

Dans ce cas, il n'y a pas d'état lié pour $L=0$. Les courbes de déphasage pour $L=0$ doivent être décalées de π . Ceci ne change en rien la valeur des sections différentielles efficaces.

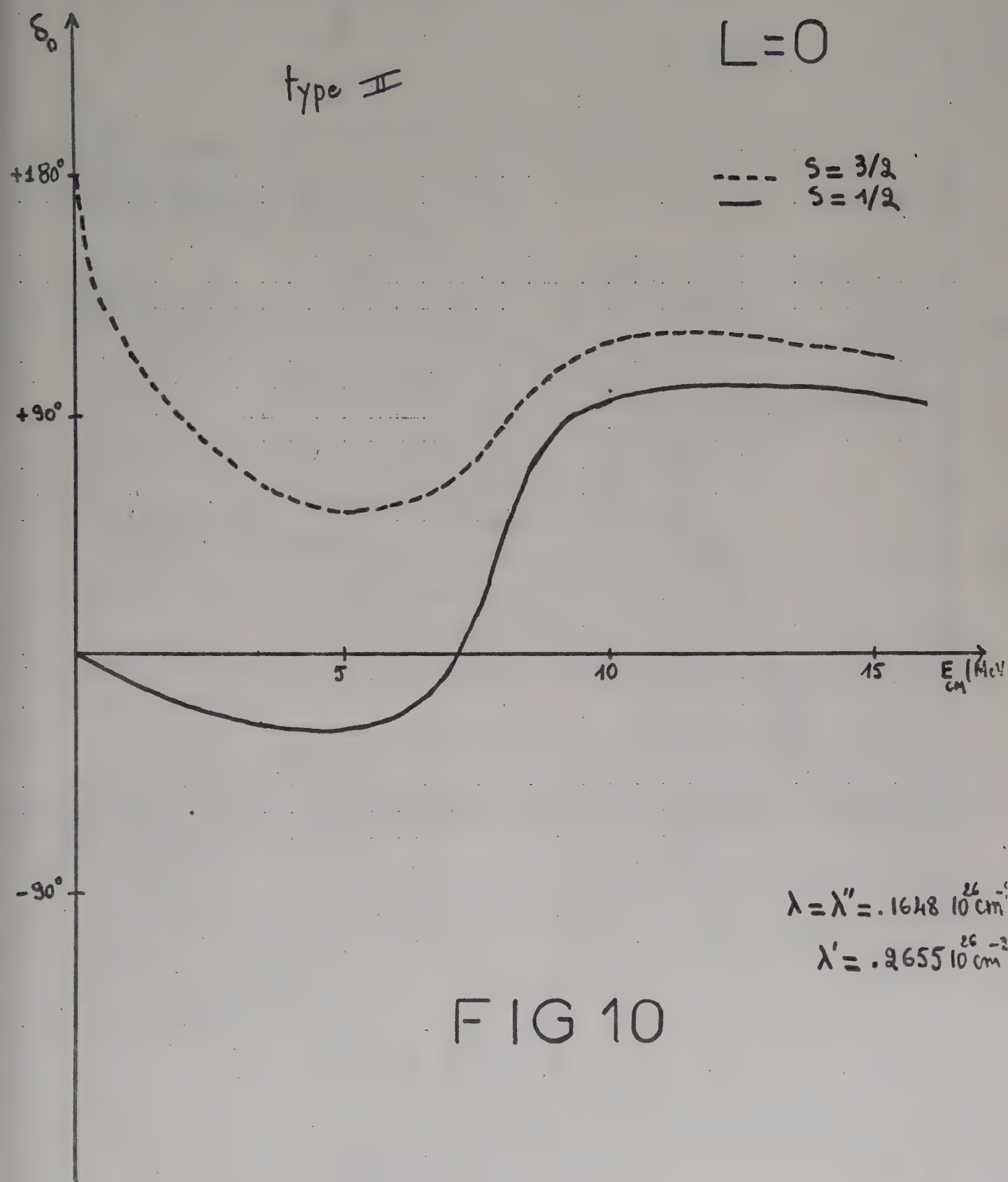


FIG 10

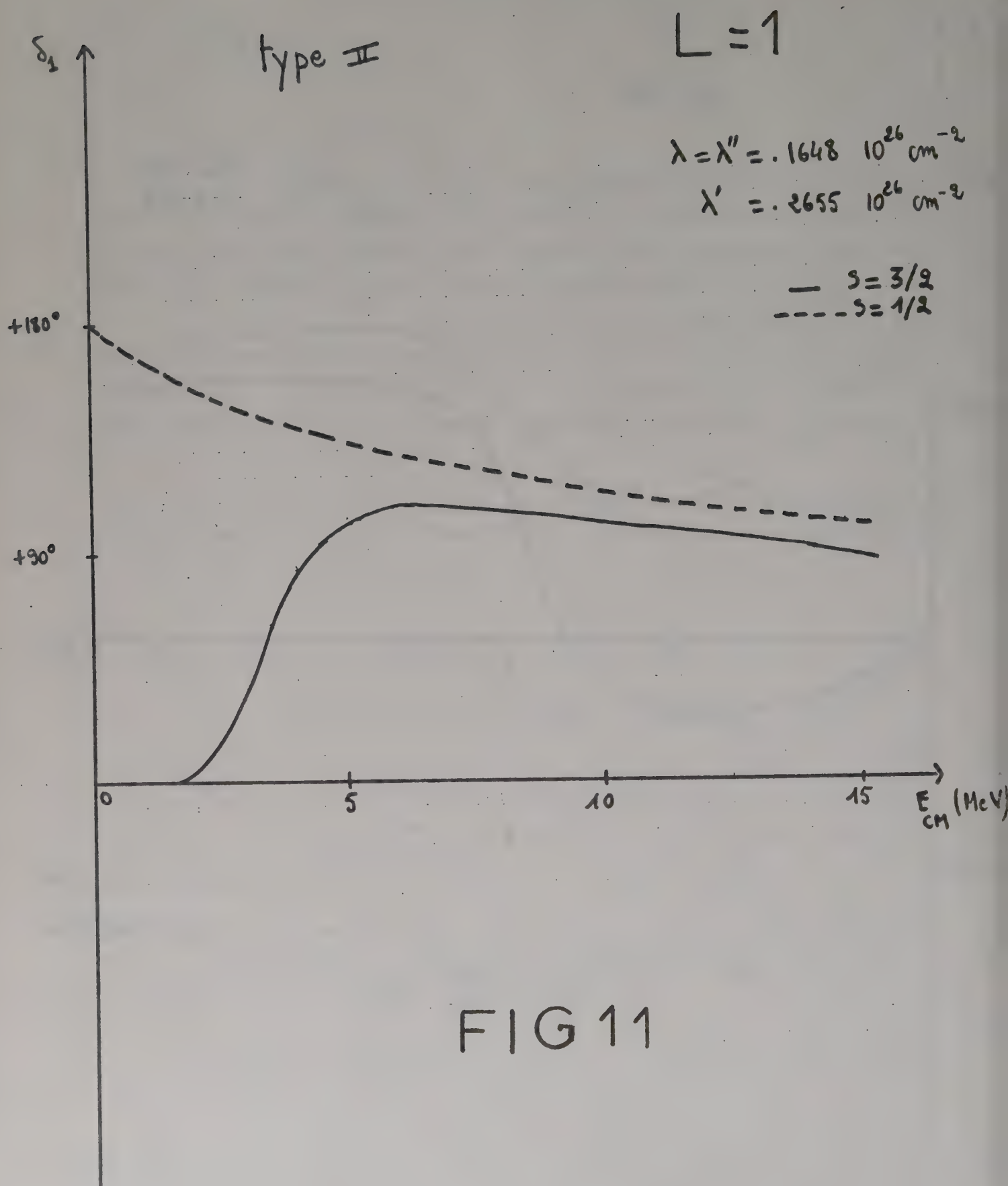


FIG 11

Les sections efficaces

Le calcul des sections efficaces ne présente pas d'intérêt dans le domaine d'énergie 0-5 MeV, car la résonance $L=1$, $S=3/2$ est décalée de 3,25 MeV, ce qui a de grandes conséquences pour la section différentielle.

Nous avons tracé dans les pages suivantes les sections différentielles tabulées pour des Energies de 5, 7,5, 10, 15 MeV qui permettent une comparaison avec les résultats expérimentaux de différentes équipes (4,30,22,1,3)

Sur les mêmes figures nous, avons tracé le rapport entre les sections efficaces pour $S=1/2$, $S=3/2$

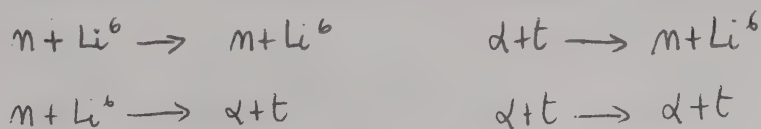
$$P(\theta) = \frac{4 \sigma^{3/2}(\theta) - 2 \sigma^{1/2}(\theta)}{4 \sigma^{3/2}(\theta) + 2 \sigma^{1/2}(\theta)}$$

En général l'accord est acceptable pour les petits angles surtout pour des énergies de 5 à 10 MeV.

Cependant on doit noter un désaccord vers les grands angles, la section restant trop élevée pour des angles compris entre 150° et 180° .

Nous ne disposons d'aucun résultat d'expériences avec neutrons polarisés pour ces énergies, il n'est donc pas possible de déduire les déphasages à partir des sections différentielles expérimentales. Il est donc difficile de définir la raison de ce désaccord.

Le fait de négliger l'interaction spin-orbite peut avoir des conséquences même à ces énergies. Comme nous l'avons noté plus haut, le fait de se limiter à une réaction à 1 canal limite la précision des résultats. Dans une première étape, il sera intéressant de calculer la réaction en incluant les canaux



La collision $n-Li^6$ étant de loin par le volume des calculs à traiter, la plus importante.

$E = 5 \text{ MeV}$

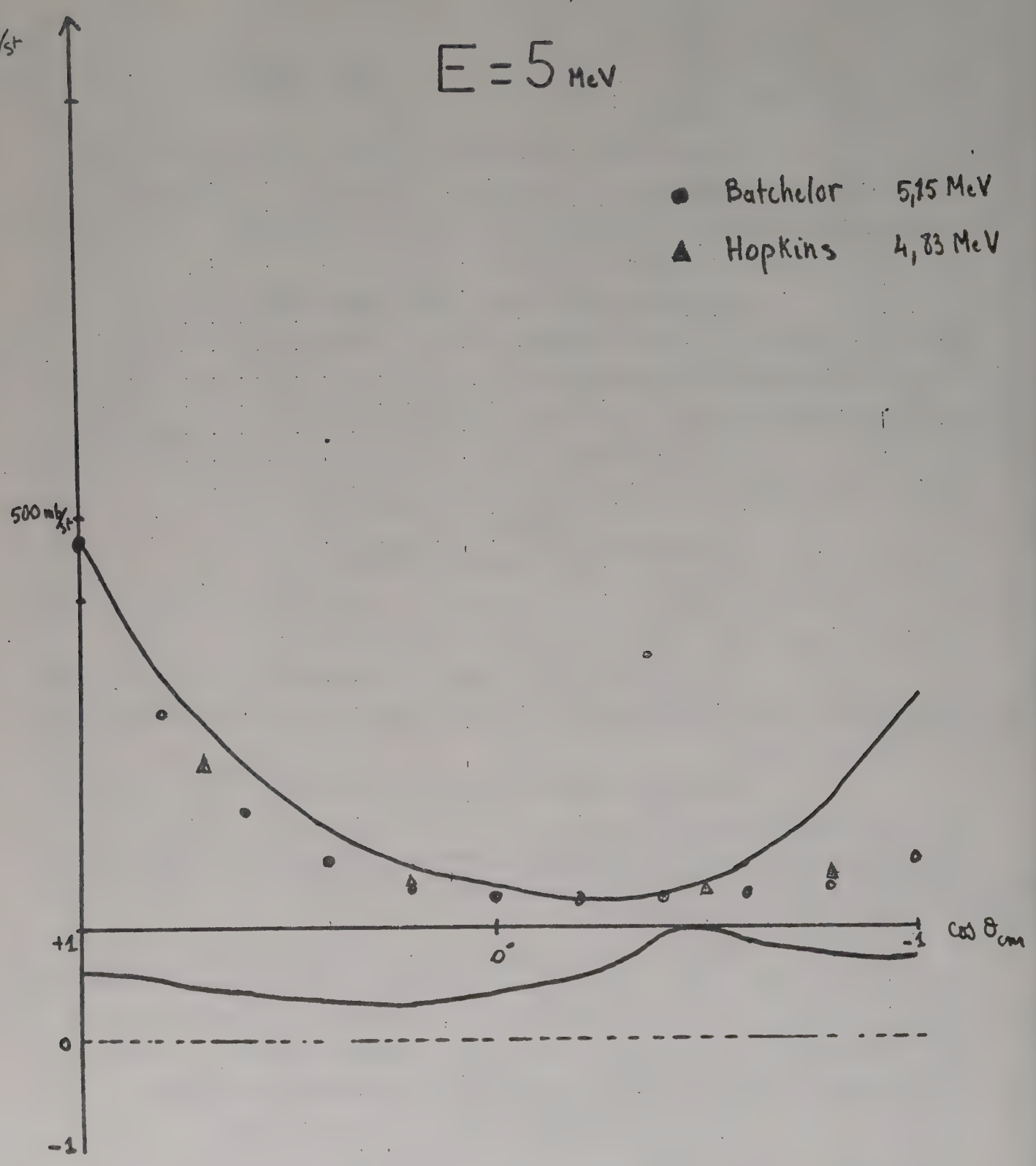
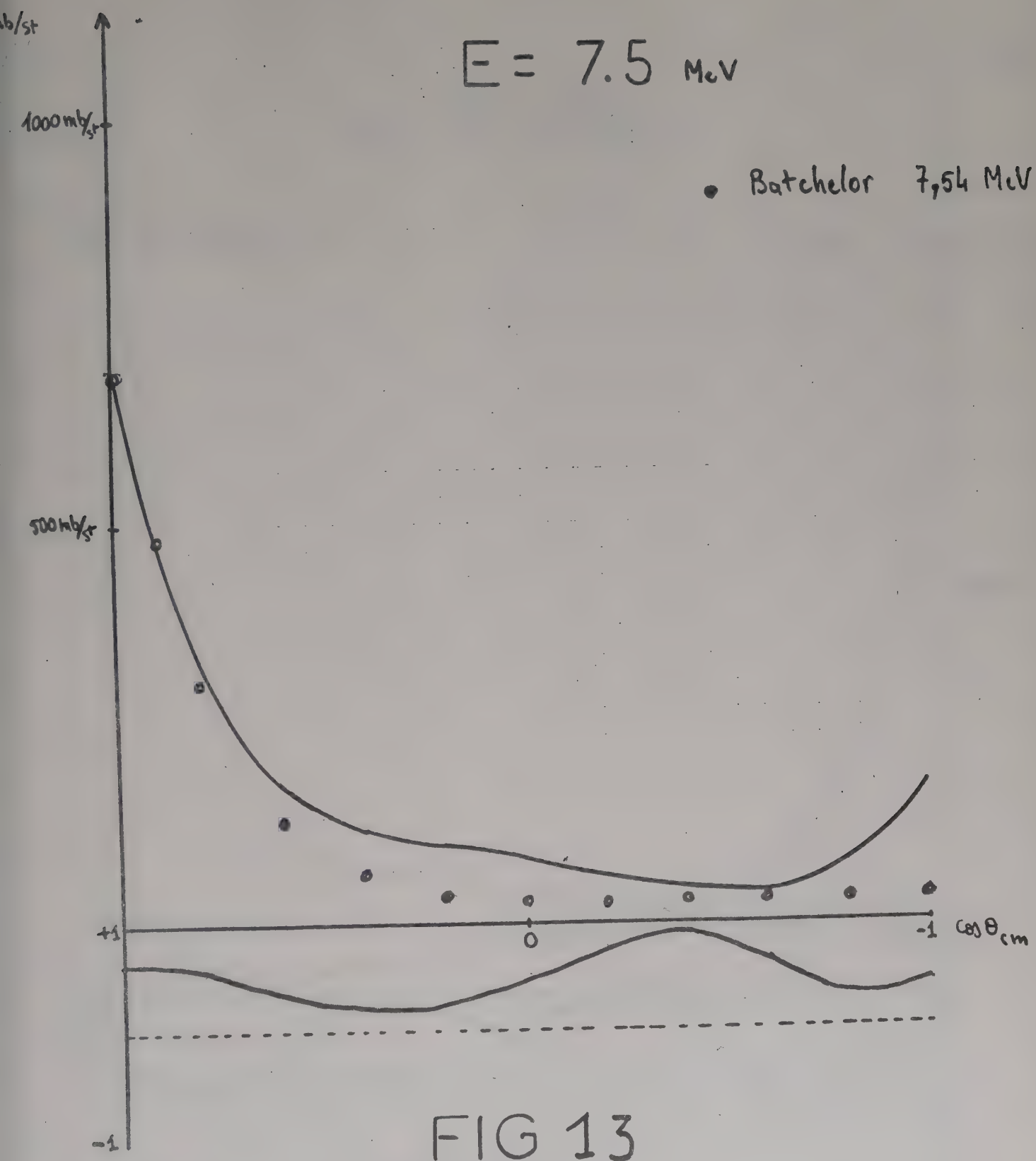
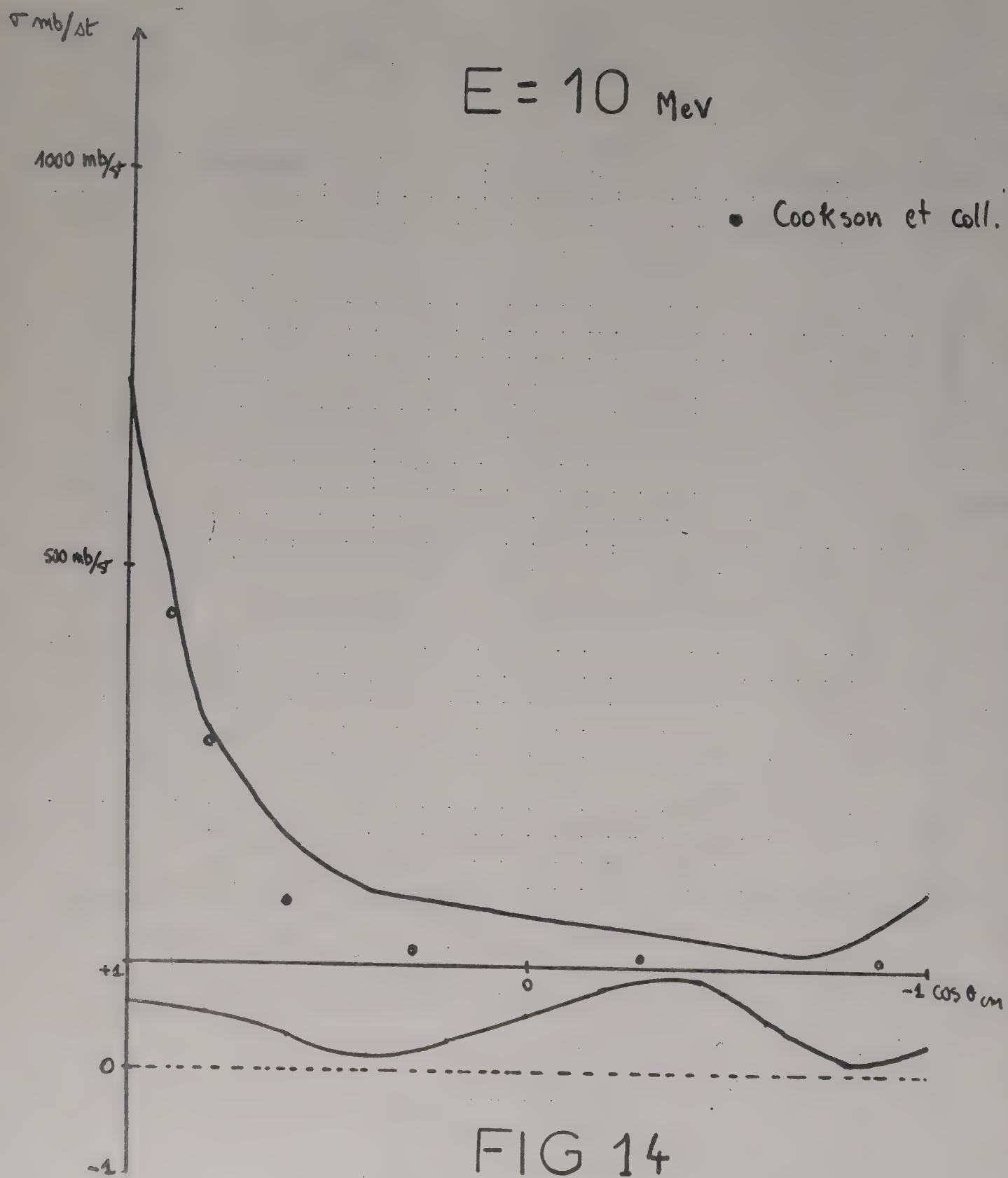


FIG 12





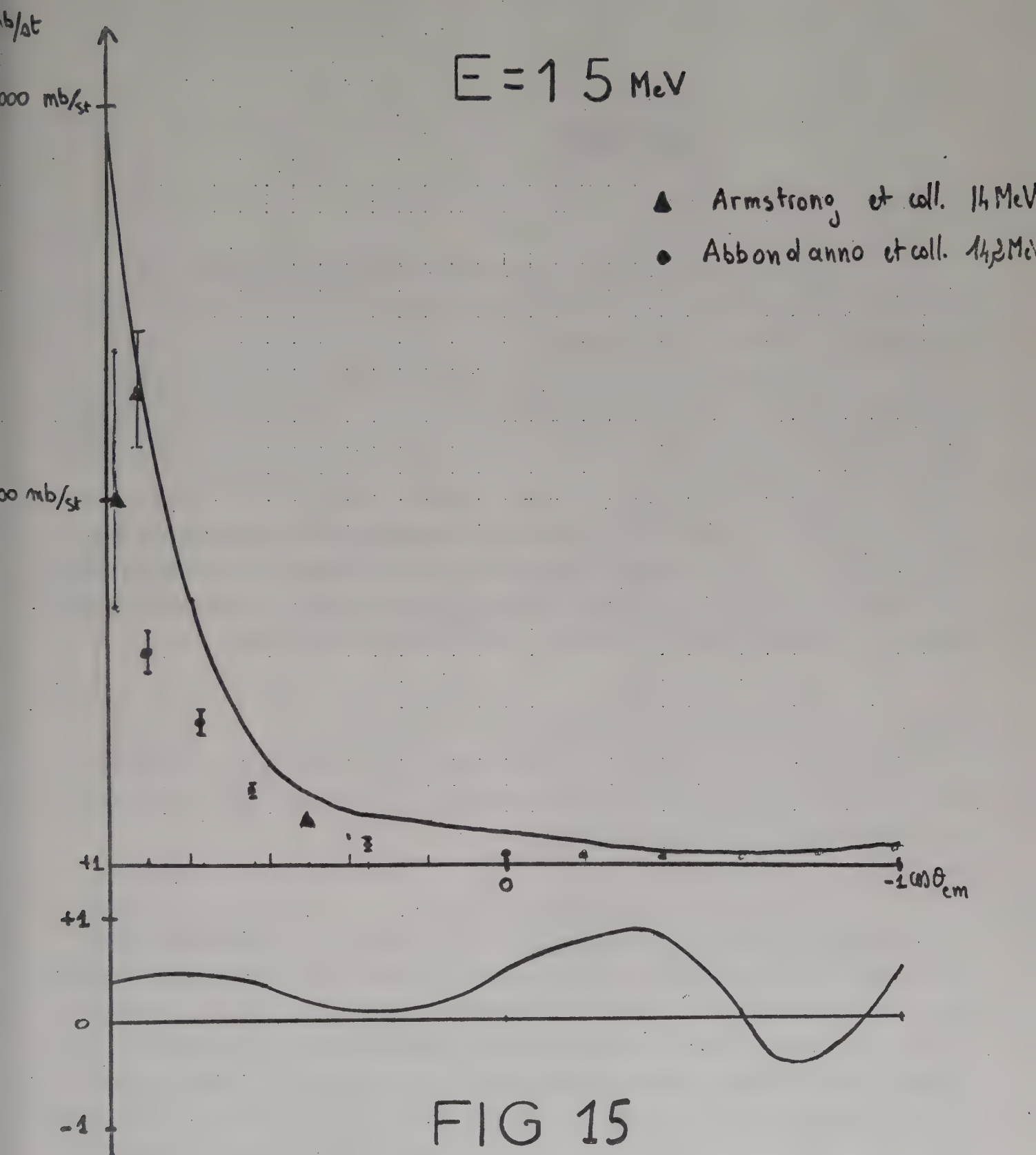


FIG 15

CONCLUSION

Avec cette étude , nous avons abordé le premier des problèmes de collision incluant des noyaux $(1s)^4$ $(1p)^A$ dans le cadre du modèle en groupes de résonances .

Dans le cas du Li^6 , le modèle permet de trouver une fonction d'onde totalement antisymétrique qui donne une bonne valeur de l'énergie de liaison et un rayon carré moyen plus faible que celui déduit des collisions e^-Li^6 . Il nous a permis de confirmer que le niveau $^{24}P_{5/2}$ du Li^7 a bien une structure en amas $n-Li^6$ et de retrouver l'ordre de grandeur des sections différentielles efficaces de la diffusion élastique $n-Li^6$ dans un domaine d'énergie de 5 à 15 MeV; ceci malgré les approximations (réaction à 1 canal , potentiel central gaussien) imposées par l'ampleur des calculs à traiter.

Parmi les noyaux de la couche $(1p)$, le Li^6 pose un problème particulier en raison de sa structure $\alpha-d$ qu'on peut lui assigner, qui rend délicate l'approche variationnelle pour les états liés et rend importants les effets de distorsion au voisinage des résonances dans les problèmes de collision .

Les collisions de particules avec les noyaux de la couche $(1p)$ mettent en présence au minimum 3 amas dans le modèle que nous utilisons , ceci entraîne une multiplicité des types d'échanges possibles entre les nucléons. Le calcul du potentiel non local dans l'équation de la diffusion prend donc une ampleur considérable . Cependant , avec l'aide des puissants calculateurs actuels, la poursuite des calculs pour des noyaux plus lourds , avec des potentiels nucléon-nucléon mieux adaptés , semble être une voie intéressante pour la compréhension des états -liés ou non - des noyaux légers .

APPENDICE NUMERIQUE

- A - Calcul des intégrales Gaussiennes
- B - Calcul des opérateurs d'énergie cinétique
- C - Calcul des intégrales d'espace
- D - Développement des noyaux de l'intégro-différentielle.

A - CALCUL DES INTEGRALES GAUSSIENNES

Il existe une catégorie d'intégrales qui interviennent souvent dans les calculs (39) :

$$(A,1) \quad n \text{ pair} \quad I_n = \int \dots \int e^{-(\lambda \vec{r}^2 + \vec{p} \cdot \vec{r} + c)} (\vec{r}^2)^{\frac{n}{2}} d\vec{r}$$

$$(A,2) \quad n \text{ impair} \quad I_n = \int \dots \int e^{-(\lambda \vec{r}^2 + \vec{p} \cdot \vec{r} + c)} (\vec{r} \cdot \vec{r}) (\vec{r}^2)^{\frac{n-1}{2}} d\vec{r}$$

Elles sont liées par la relation de récurrence

$$(A,3) \quad I_n = - \frac{d}{d\lambda} (I_{n-2})$$

On a :

$$(A,4) \quad \begin{cases} I_0 = \left[\frac{\pi}{\lambda} \right]^{\frac{3}{2}} e^{\frac{p^2}{4\lambda} - c} \\ I_1 = - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\lambda} I_0 \\ I_2 = \left(\frac{3}{2\lambda} + \frac{p^2}{4\lambda^2} \right) I_0 \\ I_3 = - \left(\frac{5}{4\lambda^2} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{8\lambda^3} \right) \vec{p} \cdot \vec{r} I_0 \\ I_4 = \left(\frac{15}{4\lambda^2} + \frac{5\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\lambda^3} + \frac{p^4}{16\lambda^4} \right) I_0 \end{cases}$$

Lorsque dans les fonctions d'ondes interviennent les angles par l'intermédiaire des polynomes de Legendre. On obtient par exemple :

$$(A,5) \quad \begin{aligned} I'_2 &= \int \dots \int e^{-(\lambda \vec{r}^2 + \vec{p} \cdot \vec{r} + c)} (\vec{r} \cdot \vec{u})^2 d\vec{r} \\ &= I_0 \left\{ \frac{(\vec{p} \cdot \vec{u})^2}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \right\} \quad \vec{u} // \vec{O}_3, |\vec{u}| = 1 \end{aligned}$$

B - CALCUL DES OPERATEURS D'ENERGIE CINETIQUE

- I -

Dans le calcul des énergies de liaison, on obtient l'énergie cinétique relative entre les différents amas à partir d'expression du type :

$$(A,6) \text{ n pair} \quad B_{n,l} = \Delta_{\vec{r}} \left\{ (\vec{r})^{\frac{n}{2}} (\vec{r} \cdot \vec{u})^l e^{-\frac{\Delta}{2} \vec{r}^2} \right\} = \Delta_{\vec{r}} \overline{\Phi}_{n,l}$$

avec $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigée selon $\vec{Oz}$.

On obtient les relations générales :

$$(A,7) \quad B_{n,0} = \left\{ -\lambda(3+2n) + \lambda^2 \vec{r}^2 + \frac{n(n-1)}{\vec{r}^2} \right\} \overline{\Phi}_{n,0}$$

$$(A,8) \quad B_{0,l} = \left\{ -\lambda(3+2l) + \lambda^2 \vec{r}^2 + \frac{l(l-1)}{(\vec{r} \cdot \vec{u})^2} \right\} \overline{\Phi}_{0,l}$$

$$\text{et } (A,9) \quad B_{n,l} = (-2)^n \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^n B_{0,l}$$

Pour les formes

$$(A,10) \quad B'_{n,l} = \Delta_{\vec{r}} \left\{ |\vec{r}|^n Y_{l,0} e^{-\frac{\Delta}{2} \vec{r}^2} \right\} = \Delta_{\vec{r}} \overline{\Phi}'_{n,l}$$

$$= \left\{ -\lambda(2n+3) + \lambda^2 \vec{r}^2 + \frac{n(n+1) - l(l+1)}{\vec{r}^2} \right\} \overline{\Phi}'_{n,l}$$

On remarque évidemment que :

$$B'_{0,0} = B_{0,0} \quad , \quad B_{0,1} = B'_{1,1}$$

- II -

Dans le problème particulier de la collision $n\text{-Li}^6$, il n'est pas possible de diagonaliser l'expression polynomiale en exponentielle.

Les opérateurs de dérivation agissent sur les fonctions :

$$A(11) \quad \underline{\Phi}^I = e^{-(\alpha \vec{r}^2 + \vec{p} \cdot \vec{r} + c)}$$

$$A(12) \quad \underline{\Phi}^{II} = e^{-(\alpha \vec{r}^2 + \vec{p} \cdot \vec{r} + c)} (\lambda \vec{r} + \vec{v})^2$$

d'où :

$$(A,13) \quad \overrightarrow{\nabla_{\vec{r}}} \underline{\Phi}^I = -(\alpha \vec{r} + \vec{p}) \underline{\Phi}^I$$

$$(A,14) \quad \Delta_{\vec{r}} \underline{\Phi}^I = \left\{ -6\alpha + (\alpha \vec{r} + \vec{p})^2 \right\} \underline{\Phi}^I$$

$$(A,15) \quad \overrightarrow{\nabla_{\vec{r}}} \underline{\Phi}^{II} = \left\{ \frac{2\lambda (\lambda \vec{r} + \vec{v})}{(\lambda \vec{r} + \vec{v})^2} - (\alpha \vec{r} + \vec{p}) \right\} \underline{\Phi}^{II}$$

$$(A,16) \quad \Delta_{\vec{r}} \underline{\Phi}^{II} = \left\{ -6\alpha + (\alpha \vec{r} + \vec{p})^2 + \frac{6\lambda^2 - 4\lambda (\lambda \vec{r} + \vec{v}) (\alpha \vec{r} + \vec{p})}{(\lambda \vec{r} + \vec{v})^2} \right\} \underline{\Phi}^{II}$$

C - CALCUL DES INTEGRALES D'ESPACE

- I -

Toutes les intégrales d'espaces (potentielles et cinétiques) qui entrent dans le calcul de l'énergie de liaison des noyaux que nous avons étudié plus haut sont du type :

$$(A,17) \quad I_D = K \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j} F(\vec{x}_1) \left\{ \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + C \right\} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n$$

pour les intégrales directes.

$$(A,18) \quad I_E = K \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j} F(\vec{x}_1) F(\vec{x}_2) \left\{ \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + C \right\} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n$$

pour les intégrales avec échange.

$$f_{ij} = f_{ji} ; \quad g_{ij} = g_{ji}$$

L'intégration sur les variables autres que $\vec{x}_1$ pour I_D et $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ pour I_E donne :

$$(A,19) \quad I_D = K^* \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij}^* \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j} F(\vec{x}_1) \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}^* \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + C^* \right\} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n-1}$$

$$(A,20) \quad I_E = K^* \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij}^* \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j} F(\vec{x}_1) F(\vec{x}_2) \left\{ \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}^* \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j + C^* \right\} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_{n-1}$$

avec

$$(A,21) \quad \left\{ \begin{array}{l} K^* = K \left[\frac{\pi}{f_{nn}} \right]^{\frac{3}{2}} \\ C^* = C + \frac{3}{2} \frac{g_{nn}}{f_{nn}} \\ f_{ij}^* = f_{ij} - \frac{f_{in} f_{jn}}{f_{nn}} \\ g_{ij}^* = g_{ij} - \frac{g_{in} f_{jn} + g_{jn} f_{in}}{f_{nn}} + \frac{g_{nn} f_{in} f_{jn}}{f_{nn}^2} \end{array} \right.$$

Les relations de symétrie $g_{ij} = g_{ji}$ et $f_{ij} = f_{ji}$ sont conservées.

L'intégration sur $\vec{x}_1$ ou $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ peut se faire en utilisant les relations du §.A de cet appendice.

- II -

Pour le cas de la collision n-Li⁶, lorsque la liaison entre les amas est $f(\vec{R}_4) = e^{-\frac{\lambda}{2} \vec{R}_4^2}$ nous avons à calculer :

$$(A,22) \quad I = K \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j} F(\vec{x}_2) \left\{ \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j + c \right\} d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 \dots d\vec{x}_n$$

L'intégration sur les variables autres que $\vec{x}_2$ s'effectue de la même manière que plus haut. On ne peut intégrer sur $\vec{x}_2$ car $F(\vec{x}_2)$ est la fonction de diffusion que l'on cherche.

Quand $f(\vec{R}_4) = \vec{R}_4^0 e^{-\frac{\lambda}{2} \vec{R}_4^2}$, le calcul à effectuer est :

$$(A,23) \quad I = K \int \dots \int e^{-\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j} F(\vec{x}_2) \vec{x}_3^2 \left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i \right)^2 \times \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j \right) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \vec{x}_i \vec{x}_j + D + \frac{E}{\vec{x}_3^2} \right\} d\vec{x}_1 \dots d\vec{x}_n$$

pour $n > 3$; intégrer sur $\vec{x}_n$, c'est effectuer les transformations :

(A,24)

$$E^* = E$$

$$D^* = D + \frac{3}{2} \frac{C_{nn}}{f_{nn}} + \frac{15}{4} \frac{a_n^2 b_{nn}}{f_{nn}^2}$$

$$K^* = K \left(\frac{\pi}{f_{nn}} \right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij}^* &= c_{ij} + \frac{f_{in} f_{jn} c_{nn}}{f_{nn}^2} - \frac{c_{in} f_{jn} + c_{jn} f_{in}}{f_{nn}} + \frac{5 a_n^2 b_{nn}}{f_{nn}^3} f_{in} f_{jn} \\
 &\quad + \frac{1}{2 f_{nn}} \left\{ b_{nn} a_i a_j + 2 a_n^2 b_{ij} + 2 a_n a_i b_{jn} + 2 a_n a_j b_{in} \right\} \\
 &\quad - \frac{5}{2 f_{nn}^2} \left\{ a_n^2 b_{in} f_{jn} + a_n^2 b_{jn} f_{in} + a_n b_{nn} a_i f_{jn} + a_n b_{nn} a_j f_{in} \right\} \\
 a_i^* &= a_i - \frac{a_n f_{in}}{f_{nn}}
 \end{aligned}$$

$$b_{ij}^* = b_{ij} - \frac{b_{in} f_{jn} + b_{jn} f_{in}}{f_{nn}} + \frac{b_{nn} f_{in} f_{jn}}{f_{nn}^2}$$

$$f_{ij}^* = f_{ij} - \frac{f_{in} f_{jn}}{f_{nn}}$$

Pour intégrer sur $\vec{x}_3$, on utilise les formules du §.A

D - DEVELOPPEMENT DES NOYAUX

Nous nous proposons de calculer (39) :

$$(A,25) \quad h_e^m(r,r') = 2\pi r r' \int_{-1}^{+1} K^m(\vec{r},\vec{r}') P_e(r) dr$$

avec (A,26) $K^m(\vec{r},\vec{r}') = g(\vec{r},\vec{r}') r^n e^{-Dnr'} r$ $0 \leq n \leq 3$

On utilise la formule bien connue (44)

$$(A,27) \quad e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(r) \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr)$$

On pose $kr = ix$

$$(A,28) \quad e^{-xr} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(r) \frac{1}{x} J_{l+1/2}(x)$$

avec (A,29) $J_{l+1/2}(x) = i^{(l-1/2)} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{l+1/2}(ix)$

Ainsi :

$$(A,30) \quad I_0 = \int_{-1}^{+1} e^{-xr} P_0(r) dr = \frac{2}{x} J_{1/2}(x)$$

On obtient les autres intégrales

$$(A,31) \quad I_n = \int_{-1}^{+1} e^{-xr} r^n P_e(r) dr = -\frac{d}{dx} (I_{n-1}(x))$$

On peut utiliser pour simplifier les expressions, les formules de récurrence

$$(A,32) \quad \begin{cases} J'_{l+1/2}(x) = \frac{l+1}{x} J_{l+1/2}(x) - J_{l+3/2}(x) \\ J_{l+5/2}(x) = J_{l+1/2}(x) + \frac{2l+3}{x} J_{l+3/2}(x) \end{cases}$$

Il vient les résultats

$$(A,33) \left\{ \begin{aligned} k_e^0(r,r') &= \frac{4\pi}{D} g(r,r') J_{e+1/2}(Dr r') \\ k_e^1(r,r') &= \frac{4\pi}{D} g(r,r') \left\{ J_{e+3/2}(Dr r') - \frac{e}{Dr r'} J_{e+1/2}(Dr r') \right\} \\ k_e^2(r,r') &= \frac{4\pi}{D} g(r,r') \left\{ \frac{2}{Dr r'} J_{e+3/2}(Dr r') + \left[\frac{e(e-1)}{(Dr r')^2} + 1 \right] J_{e+1/2}(Dr r') \right\} \\ k_e^3(r,r') &= \frac{4\pi}{D} g(r,r') \left\{ \left[1 + \frac{e^2+e+6}{(Dr r')^2} \right] J_{e+3/2}(Dr r') - \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2-e}{Dr r'} + \frac{e(e-1)(2-e)}{(Dr r')^3} \right] J_{e+1/2}(Dr r') \right\} \end{aligned} \right.$$

Les premiers termes de la série des $J_{e+1/2}$ s'écrivent :

$$(A,34) \left\{ \begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \operatorname{sh}(x) \\ J_{3/2}(x) &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} - \operatorname{ch}(x) \\ J_{5/2}(x) &= \operatorname{sh}(x) \left\{ 1 + \frac{3}{x^2} \right\} - \frac{3}{x} \operatorname{ch}(x) \end{aligned} \right.$$

De la définition des $J_{e+1/2}$, il résulte que :

$$J_{e+1/2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (-1)^e \frac{x^{e+1}}{(2e+1)!!}$$

Ceci nous assure que $k_e^i(r,r')$ est nul si $rr' \rightarrow 0 \quad \forall e$.

Cela est évident sauf pour $k_e^3(r,r')$, pour lequel on peut montrer que :

$$(A,35) \quad \frac{e^2+e+6}{x^2} J_{e+3/2}(x) + \frac{2-e}{x} J_{e+1/2}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{e+1} 3e^2 x^e}{(2e+3)!!}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad \forall e$$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) ABBONDANNO U., GIACOMICH R., GRANATA L., LAGONEGRO M.,
POIANI G.
Il Nuovo Cimento, 66 A, 139 (1970)
- (2) AJZENBERG - SELOVE
Nucl. Phys. 78, 1 (1970)
- (3) ARMSTRONG A.H., GAMMEL J., ROSEN L., FRYE C.M.
Nucl. Phys. 52, 505 (1964)
- (4) BATCHELOR R., TOWLE J.H.
Nucl. Phys. 47, 385 (1963)
- (5) BIEL S.J.
Proc. Phys. Soc. London, A 70, 866 (1957)
- (6) BLATT J.M., WEISSKOPF V.F.
"Theoretical Nuclear Physics" Ed. Wiley (1952)
- (7) BRANSDEN B.H.
Proc. Roy. Soc. A 209, 380 (1950)
- (8) BRANSDEN B.H., MAC KEE J.S.C.
Phil. Mag. 45, 869 (1954)
- (9) BRANSDEN B.H., ROBERTSON H.H., SWAN P.
Proc. Phys. Soc. A 69, 877 (1956)
- (10) BRANSDEN B.H., SMITH K., TATE C.
Proc. Roy. Soc. A 247, 73 (1958)

- (11) BRANSDEN B.H., ROBERTSON H.H.
Proc. Phys. Soc. A 72, 770 (1958)
- (12) BRANSDEN B.H., HAMILTON R.A.
"The Nuclear Forces and the few nucleon problem"
Ed. Pergamon Press (1960)
- (13) BROWN R.E., TANG Y.C.
Phys. Rev. 176, 1235 (1968)
- (14) BUCKINGHAM R.A., MASSEY H.S.W.
Proc. Roy. Soc. A 179, 123 (1941)
- (15) BUCKINGHAM R.A., HUBBARD S.J., MASSEY H.S.W.
Proc. Roy. Soc. A 211, 183 (1952)
- (16) BURKE P.G., ROBERTSON H.H.
Proc. Phys. Soc. A 70, 777 (1957)
- (17) BURKE P.G., LASKAR W.
C.R. Ac. Sc. T. 246, 3044-3047, 3158-3161 (1958)
- (18) BURLESON G.R., HOFSTADTER R.
Phys. Rev. 112, 1282 (1958)
- (19) BURKE P.G., HAAS F.A.
Proc. Roy. Soc. A 252, 177, (1959)
- (20) BUTCHER A. , MAC NAMEE M.J.
Proc. Phys. Soc. 74, 529 (1959)
- (21) CHRISTIAN R.S., GAMMEL J.L.
Phys. Rev. 91, 100 (1953)
- (22) COOKSON J.A., DANDY D., HOPKINS J.C.
Nucl. Phys. A 91, 273 (1967)

- (23) EDWARDS S.F.
Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 652, (1952)
- (24) FANTONI S., ROSATI S.
Nucl. Phys. A 151, 317 (1970)
- (25) FOX L., GOODWIN E.T.
Proc. Camb. Phil. Soc. 45, 373 (1949)
- (26) GOLDHAMMER P.
Rev. of Mod. Phys. 35, 40 (1963)
- (27) HERNDON R.C., TANG Y.C.
Methods in Computational Physics, 6, (Acad. Press N.Y. 1966)
- (28) HOCHBERG S., MASSEY H.S.W., UNDERHILL L.H.
Proc. Phys. Soc. A 67, 957 (1954)
- (29) HOCHBERG S., MASSEY H.S.W., ROBERTSON H.H., UNDERHILL L.H.
Proc. Phys. Soc. A 68, 746 (1955)
- (30) HOPKINS J.C., DRAKE D.M., CONDE H.
Nucl. Phys. A 107, 139 (1968)
- (31) HORIE H., TAMURA T., YOSHIDA S.
Proc. Theor. Phys. Jap. 8, 341 (1952)
- (32) KHANNA F.C., TANG Y.C., WILDERMUTH K.
Phys. Rev. 124, 515 (1961)
- (33) KOPALEISHVILI T.I., VASHAKIDZE I. Sh. ...
Sov. Phys. JETP 11, 1268 (1960)
- (34) KURATH D.
Phys. Rev. 101, 216 (1956)

- (35) LASKAR W.
Ph. D. Thèse London (1959)
- (36) LASKAR W., TATE C. BURKE P.G.
"Nuclear Forces and the few nucleon problem" Pergamon Press
(1960)
- (37) LASKAR W., TATE C., PARDOE B., BURKE P.G.
Proc. Phys. Soc. A 77, 1014 (1961)
- (38) LASKAR W.
Annals of Phys. 17, 436, 20, 175 (1962)
- (39) LASKAR W.
"International Course on Nuclear Physics" (Trieste)(1966)
- (40) LASKAR W. , LE MAITRE R.
J. de Phys. 29, 409, (1968)
- (41) LANE R.O., LANGSDORF A.S., MONAHAN J.E., ELWYN A.J.
Ann. of Phys. 12, 135 (1961)
- (42) LOHDI M.A.K., MIREs R.W.
NucL. Phys. A 149, 625 (1970)
- (43) MERCHEZ F., NGUYEN VAN SEN, REGIS V., BOUCHEZ R.
C.R. Ac. Sc. 260, 3922 (1965)
- (44) MESSIAH A.
"Mécanique Quantique" Ed. Dunod (1965)
- (45) MEYER E. Jr.
Am. J. of Phys. 37, 296 (1969)
- (46) MOSHINSKY M.
"Group theory and the many-body problem" Ed. Gordon-Breach
(1968)

- (47) MOTT N.F., MASSEY H.S.W.
"the theory of Atomic collisions" Oxford Univ. Press (1965)
- (48) NATAF R.
"Les modèles en Spectroscopie Nucléaire" Ed. Dunod (1964)
- (49) PEARLSTEIN L.D., TANG Y.C., WILDERMUTH K.
Phys. Rev. 120, 224 (1960)
- (50) PEARLSTEIN L.D., TANG. Y.C., WILDERMUTH K.
Nucl. Phys. 18, 23 (1960)
- (51) REICHSTEIN T., TANG. Y.C.
Nucl. Phys. A 139, 144 (1969)
- (52) ROBERTSON H.H.
Proc. Camb. Phil. Soc. 52, 538 (1956)
- (53) SAITO S., HIURA J., TANAKA H.
Prog. of Th. Phys. Jap. 39, 635 (1968)
- (54) SCHMID E.W., TANG. Y.C., HERNDON R.C.
Nucl. Phys. 42 (95, 113, 247) (1963)
- (55) SCHWARZ S., STROMBERG L.G., BERGSTROM A.
Nucl. Phys. 63, 593 (1965)
- (56) SPIGER R.J., TOMBRELLO T.A.
Phys. Rev. 163, 964 (1967)
- (57) SUELZLE L.R., YEARIAN M.R., HALL CRANNELL
Phys. Rev. 162, 992 (1967)
- (58) SUZUKI T.
Prog. of Theor. Phys. 42, 24 (1969)

- (59) SWAN P.
Proc. Phys. Soc. A 68, 238 (1953)
A 228, 10 (1955)
- (60) TALMI I.
Helv. Phys. Acta 25, 185 (1952)
- (61) TANG Y.C., WILDERMUTH K., PEARLSTEIN L.D.
Phys. Rev. 123, 548 (1961)
- (62) TANG Y.C., SCHMID E., WILDERMUTH K.
Phys. Rev. 131, 2631 (1963)
- (63) TAYLOR B.N., PARKER W.H., LANGENBERG D.N.
Rev. of Mod. Phys. (1970)
- (64) THOMPSON D.R., TANG Y.C.
Nucl. Phys. A 106, 591 (1968)
Phys. Rev. 159, 806 (1967)
- (65) THOMPSON D.R., TANG Y.C.
Phys. Rev. 179, 971 (1969)
- (66) THOMPSON D.R., REICHSTEIN J., MACCLURE W., TANG Y.C.
Phys. Rev. 185, 1351 (1969)
- (67) WHEELER J.A.
Phys. Rev. 52, 1083, 1107 (1937)
- (68) WILDERMUTH K., KANELLOPOULOS Th.
NucL. Phys. 7, 150 (1958)
- (69) WILDERMUTH K., MACCLURE W.
"Cluster representation of Nuclei" Springer-Verlag (1966)

(70) WILLARD H.B., BAIR J.K., KINGTON J.D., COHN H.O.

Phys. Rev. 101, 765, (1956)

(71) WONG C., ANDERSON J.D., MAC CLURE

Nucl. Phys. 33, 680 (1962)

(72) WACKMAN P., AUSTERN

Nucl. Phys. 30, 529, (1962)

